**CHỦ ĐỀ: NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

## Chủ đề 1: NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN

- Các bài toán thuộc loại này có các dạng như sau: cho tam giác ΔABC thoả mãn một điều kiện nào đó, thường là cho dưới dạng hệ thức. Hãy chứng minh ΔABC cân.

- Phải lưu ý tính đối xứng của bài toán để định hướng các phép biến đổi. Chẳng hạn cân tại C thì tập trung vào chứng minh A=B.

- Các bài toán về nhận dạng tam giác cân có thể chia thành 2 loại chính như sau:

### LOẠI I: SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC

Từ giả thiết đi đến kết luận bằng cách vận dụng các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức biến đổi lượng giác.

1. Cho ΔABC có  (1). CM ΔABC cân.

Ta thấy trong (1) chứa cả 2 yếu tố góc và cạnh. Đối với bài toán này ta có thể CM ΔABC cân theo 2 cách A=B hoặc a=b.

Tuỳ vào biểu thức của bài toán mà ta chọn biến đổi về góc hay về cạnh sao cho thuận lợi hơn.

Cách 1:

(1)  

Áp dụng định lý hàm Sin ta được:









 ΔABC cân tại C

Cách 2:

(1) 





a = b ABC cân tại C

Chú ý: Ta có 

 

1. Cho ABC thoả  (1) CM ABC cân.

Giải: 



Nên cân tại C

NX: Từ (1) ta có thể biến đổi như sau



Tiếp tục chuyển vế và đặt thừa số chung ta được: 

Cách khác:

Từ (\*) ta xét 



 là hàm tăng trên 

Vì vậy: (\*) 

Chú ý: Trong bài toán CM tam giác cân ta thường gặp 2 vế của biểu thức đối xứng. Trong trường hợp này ta có thể sử dụng phương pháp hàm số:

Tính chất: Nếu hàm ƒ tăng (hoặc giảm) trong khoảng (a,b)

 Thì : 

### LOẠI II: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

- Khác với tam giác đều có vô số hệ thức “đẹp” thường sử dụng BĐT để chứng minh, những hệ thức đẹp của tam giác cân rất ít.

- Cho ΔABC có các cạnh và các góc thỏa mãn một hệ thức:

 F(A,B,C,a,b,c)=0

CM ΔABC cân tại C bằng BĐT như sau:

* Dùng BĐT chứng minh F(A,B,C,a,b,c)≥ 0
* Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a=b (hoặc A=B)
* Vậy F(A,B,C,a,b,c)=0 ⇔ a=b ⇔ ΔABC cân tại C
1. Cho a,b,c, là độ dài 3 cạnh của một tam giác Biết rằng 

CM tam giác trên là tam giác cân

Giải:





+) Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số c+a, c+b ta có

Dấu “=” xảy ra ⇔ c+a = c+b ⇔ a=b (2)

Để (2) xảy ra thì trong (3) xảy ra dấu đẳng thức. Tức là a=b hay tam giác đã cho là tam giác cân.

NX: Từ (2) ta hoàn toàn có thể giải theo cách thông thường bằng cách lấy bình phương 2 vế, ta được:

 

\* Cách ra đề cho bài toán nhận dạng tam giác bằng BĐT Cauchy:

Từ a=b hoặc A=B

+) Ta biến đổi 2 vế để được một đẳng thức tương đương

Đặt VT=α, VP=β. Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số α, β

Tại vị trí dấu “=” xảy ra ta được bài toán chứng minh ΔABC cân tại C

Từ bài toán đó ta có thể tiếp tục biến đổi để được 1 bài toán phức tạp hơn dựa vào các phép biến đổi tương đương hay biến đổi lượng giác.

1. Cho ΔABC thoả mãn hệ thức: (1). CM ΔABC là tam giác cân

Giải: Ta có: 

+) Do đó (1)  (2)

+) Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số: p-b, p-c



 (3)

+) Dấu “=” xảy ra 

Vậy từ (2) suy ra trong (3) xảy ra dấu đẳng thức, tức là ta có b = c ⇔ ΔABC cân tại A.

NX: Nếu không áp dụng BĐT thì từ (2) ⇔ 4(p-b)(p-c)=a2

  

 

### Bài tập tự luyện

1. Cho ABC thỏa:  (1). Tam giác ABC là tam giác gì ?
2. Cho ABC thỏa mãn hệ thức

 và C≠ 900 (1) CM ABC là tam giác cân.

1. Cho ΔABC thoả mãn hệ thức: (1)

CM ΔABC cân.

1. Cho △ABC thoả mãn điều kiện . CM △ABC cân.
2. CM điều kiện cần và đủ để △ABC cân là cos, biết C = 1200

 Chủ đề 2: NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG

So với những loại tam giác khác tam giác vuông có một số tính chất đặc biệt như tổng bình phương của 2 cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền. Số đo của góc vuông bằng số đo của hai góc còn lại. Từ xa xưa Pitago đã phát hiện một dấu hiệu để nhận dạng tam giác vuông là định lý Pitago. Trong phần này chúng tôi xin cung cấp một số dấu hiệu để nhận biết tam giác vuông.

Để nhận dạng tam giác vuông ta thường đưa về một số dấu hiệu sau đây:

 1. sinA = 1 2. cosA = 0 3. sin2A = 0

 4. cos2A = -1 5.  6. tanA = cotanB

 7. sinA=Sin(B-C) 8. a2 = b2 + c2

### LOẠI I:SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Chứng minh rằng trong ΔABC thoả mãn:  (1) thì ΔABC vuông.

Ta có: sin2A + sin2B +sin2C =2+2cosA.cosB.cosC

Từ (1) suy ra cosA.cosB.cosC =0 ⇔ vuông

1. Cho tam giác ABC thoã mãn hệ thức rc = r + ra + rb (2) với ra là bán kính đường tròn bàng tiếp.Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Giải: +) Ta có S = pr  và S = (p-a) ra 

+) Khi đó (2) tương đương với =

 

 

 

 ⇒ΔABC vuông.

 +) Nếu áp dụng hệ thức cơ bản trong tam giác, ta có

 rc = ptg

 Từ (2) ta được ptg

 (2’)

 +) Mặt khác p = R(sinA+ sinB + sinC)=4Rcos

 Từ (2) ta có 2RsinC.

 .

Do .⇒ΔABC vuông.

 Chú ý: Khi gặp 1 bài toán có chứa các yếu tố khác cạnh và góc ta nên chuyển về bài toán có chứa góc hoặc cạnh để giải, khi đó có nhiều công cụ để giải hơn.

### LOẠI II: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Cho ΔABC có A, B nhọn và thoả mãn hệ thức sin2A + sin2B =. (1)

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Giải : +) Vì 0 < sinC ≤ 1 nên .

Từ (1) 

 .

+) Nếu C = 900 ⇒ A+ B = 900 ⇒ sin2A+sin2B= sin2A+cos2A = 1.

+) Vậy nếu ABC là tam giác vuông tại C thì thoã mãn hệ thức đã cho.

+) Nếu C < 900. Từ giả thiết ta có 

⇔ 1 - cos (A+B).cos(A-B) =  (3).

+) Ta có sinC < 1. Mặt khác do A, B, C nhọn nên cosC > 0, cos(A-B) > 0, vậy từ (3) ta suy ra điều vô lý. Do đó trường hợp C < 900 không xảy ra. Vậy ABC là tam giác vuông tại C.

Nhận xét:

\* Nếu C = 900 ta không thử lại mà kết luận ΔABC vuông là không chặt chẽ. Vì ΔABC chưa chắc thoả mãn (1).

\* Nếu xét trường hợp C < 900 ta đi đến kết luận loại trường hợp này. Từ đây ta phải có C = 900, không cần thử lại.

\* Điểm quan trọng của bài tập này là ở chỗ với a ∈ R, 0 <a ≤1 thì ta có an  > am , 1 < n < m, n,m ∈Q. Từ đấy bài toán (1) có thể mở rộng nếu sin2A + sin2B =  thì ΔABC vuông.

### Bài tập tự luyện

 Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông nếu thoả một trong các điều kiện sau

Bài 1: cos2A + cos2B + cos2C = -1.

Bài 2: a) sinA + sinB + sinC = 1 + cosA + cosB + cosC

Hướng dẫn: Chứng minh tam giác này vuông tại 1 trong 3 góc.

 b) sinA + sinB + sinC = 1- cosA + cosB + cosC.

Hướng dẫn: Chứng minh vuông tại C.

Bài 3: 

Hướng dẫn: A p dụng định lý hàm sin

Bài 4: r(sinA + sinB)= 

Hướng dẫn: Ta sử dụng hệ thức cơ bản

r = 4R

Bài 5: r + ra + rb + rc = a + b + c

Áp dụng công thức lượng cơ bản r =ptg

p = 4Rcos và định hàm sin.

Hay có thể áp dụng công thức S = rc(p-c), S=rp.

Bài 6: 3cosB + 4sinB + 6sinC +8cosC =15 (6)

HD: Áp dụng BĐT Schwartz cho các cặp (3,4), (cosB,sinB) và (6,8), (sinC,cosC).

Cách khác: Bài 6 có thể vận dụng phép biến đổi tương đương và tính chất bị chặn của hàm sinx, cosx.

(6)(6’)

Đặt Thì từ (6’) ta suy ra

5sin(B+) + 10cos(C-) = 15

vuông.

Bài 7: sin3A + sin2B = 4sinAsinB. (7)

HD: Dùng công thức biến đổi tổng thành tích cho vế trái và tích thành tổng, rút gọn ta được cos(A-B).(sinC-1) = cosC

⇒ cos2(A-B).(sin2C-1) = 1 – sin2C.

 (1-sinC)[cos2(A-B)(1-sinC) - 1- sinC] = 0.

Đánh giá cos2(A-B)(1-sinC)- 1 – sinC < 0 Từ đó suy ra sinC = 1

 C = 900

Bài 8: Cho ΔABC có đường cao AH, là nửa chu vi của ΔABC, ΔABH, ΔACH, biết p2 = p12 + p22 (1). Chứng minh ΔABC vuông.

Gợi ý: Nhận xét vị trí của H và vận dụng tỉ số lượng giác của ΔABC để đưa bài toán thành biểu thức theo góc.

Bài 9: ΔABC có đặc điểm gì nếu

 cosA (1 – sinB) = cosB.

Gợi ý: 1 – sinB và cosB cùng chứa nhân tử chung là .

Bài 10: ΔABC có đặc điểm gì nếu

2sin2A – sin2B = sinC + .

HD: Dùng phương pháp đánh giá để giải.

1. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thoả

sin4A + 2sin4B+ 2sin4C = 2sin2A (sin2B + sin2C) (1). Chứng minh ΔABC vuông cân.

## Chủ đề 3:NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

Trong mục này, một số phương pháp hay sử dụng để nhận dạng tam giác đều như

Loại I:Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

 1/ Phương pháp sử dụng 9 bài toán nhận dạng tam giác đều.

 2/ Phương pháp sử dụng mệnh đề. ⇔ A1 = A2 = … =An = 0

 3/ Nhận dạng tam giác đều từ một hệ điều kiện.

 Loại II:Sử dụng bất đẳng thức.

###  LOẠI I:SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

#### 1. Phương pháp sử dụng 9 bài toán cơ bản nhận dạng tam giác đều.

 \* △ ABC thoả mãn các hệ thức sau thì △ ABC là tam giác đều.

 a) cos A + cosB + cosC = f) cotgA + cotgB + cotgC =

 b) sin sin sin =  g) sinA + sinB + sinC = 

 c) cosA cosB cosC = h) cos + cos + cos = 

 d) sin2A + sin2B + sin2C =  i) sin + sin + sin=

 e) 

1. Giả sử △ ABC thoả mãn điều kiện: 2(acosA + bcosB + ccosC) = a + b + c. Chứng minh △ ABC đều.

Giải: +) Áp dụng định lý Sin ta có a=2RsinA , b = 2RsinB , c = 2RsinC ( với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp △ ABC), hệ thức đã cho tương đương với:

 2sinA cosA + 2sinB cosB + 2sinCcosC = sinA + sinB + sinC

⇔ sin2A + sin2B + sin2C = sinA + sinB + sinC (\*)

Tacó sin2A + sin2B + sin2C = 2sin(A + B)cos( A – B ) – 2sin( A + B)cos( A + B)

= 2sin (A + B)(cos(A + B) – cos (A + B)) = 4sinAsinBsinC.

Tacó sinA + sinB + sinC = 





(dạng bài toán cơ bản). Vậy △ ABC đều.

1. CMR nếu A,B,C là ba góc của một tam giác thoả mãn

 thì tam giác ấy đều

 Hệ thức đã cho tương ứng với



( dạng bài toán cơ bản)

 Vậy △ ABC đều.

#### 2. Phương pháp sử dụng mệnh đề

1. Chứng minh △ABC có  = 9r thì △ ABC đều

Ta có ha  + hb + hc = 9r ⇔ 



Vậy △ ABC đều.

1. CMR nếu trong △ ABC ta có 

( p: nửa chu vi, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp △ ABC) thì △ ABC là tam giác đều.

Ta có: (\*) ⇔ 



Ta có sin2A + sin2B + sin 2C = 4 sinAsinBsinC =

 (\*\*) ⇔  ⇔ (ab + bc+ ca) (a + b + c)=9abc

⇔ a2b + bc2+ ab2 + ac2+ b2c+ a2c = 6abc

⇔ b(a2+c2- 2ac) + a(b2+ c2 - 2bc) + c(a2 + b2 – 2ab)=0

⇔ b(a - c)2 + a(b - c)2 + c(a - b)2 ⇔ ⇔ a=b=c .

 Vậy Δ ABC đều.

### LOẠI II: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

- Từ điều kiện của bài toán (thường là các hệ thức, các bất đẳng thức)sử dụng các phép biến đổi lượng giác để dẫn đến một bất đẳng thức đơn giản, có thể đánh giá được điều kiện dấu bằng xảy ra.

- Thiết lập một hệ phương trình xác định mối quan hệ giữa các góc, các cạnh của tam giác, qua đó nhận dạng được tam giác.

1. Cho Δ ABC thỏa điều kiện  (\*). Chứng minh ΔABC đều.

Giải: +) Từ giả thiết suy ra ΔABC nhọn (cos A > 0, cos B > 0, cos C > 0)

+) Ta có: cosA cosB =  =

Vậy 0 < cosA cosB 

+) Tương tự ta cũng có 

Suy ra 

+) Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

  A = B = C

Vậy ΔABC đều

1. Cho ΔABC thỏa đk

 Xác định dạng của ΔABC ?

 Từ điều kiện 

  cosA

 Mặt khác sin2A + Sin2B =2sin(A+B)cos(A-B)

 

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi hoặc SinA = SinB = SinC

Vậy ΔABC vuông cân tại A hoặc đều.

### Bài tập tự luyện

1. Cho △ ABC đều thoả mãn hằng thức:  và . Chứng minh △ ABC là tam giác đều.
2. CMR nếu trong Δ ABC ta có  thì Δ ABC đều
3. Cho Δ ABC thoả  (1) CMR Δ ABC đều
4. CMR ΔABC đều nếu 
5. Cho ΔABC, thoả  (1)

 CMR ΔABC đều khi dấu ”=” xảy ra.

1. Cho ΔABC thỏa  (1). CMR ΔABC đều.
2. Cho ΔABC thoả tan6+ tan6+ tan6=. CMR ΔABC đều.
3. Cho ΔABC thoả 2(la + lb + lc) =(a + b + c)

 CMR ΔABC đều.

#### Nhận dạng tam giác đều bằng cách sử dụng bđt Jensen

1. CMR Δ ABC thoả  thì đều
2. Cho Δ ABC nhọn thoả mãn



 Chứng minh Δ ABC đều.

 Chủ đề 4:NHẬN DẠNG TAM GIÁC KHÁC

1. Xác định các góc của Δ ABC nếu:  (1)

Cách 1: (1) 

 (1’)

Đặt t =  t  (0,1)

(1’) = 0

Đặt  = , t  (0,1)

Ta có: Δ’ = , ∀ t  (0,1).

 



1. Cho Δ ABC thoả b(a2-b2) = c(c2-a2). Nhận dạng tam giác này.

Ta có 







Bài này ta cũng có thể biến đổi như sau:





.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tam giác ABC có đẳc điểm gì nếu:

sin6A + sin6B + sin6C = 0

HD: Dùng phép biến đổi tương đương chuyển về phương trình tích

Bài 2: Nhận dang tam giác ABC nếu thoả

 (2)

Bài 3: Cho tam giác ABC có các cạnh thoả:

, , , . Hãy nhận dạng tam giác ABC.

HD: Xét điều kiện của x để tồn tại tam giác

Bài 4: Nhận dạng tam giác ABC biết: sin5A + sin5B + sin5C = 0

HD: Ta biến đổi tương đương đẳng thức trên về dạng:

 

Bài 5: Tính các B và C của tam giác ABC biết: .

Một số hệ thức lượng trong tam giác

 ,

2. 

3. 

4. 

5.  (ABC không là tam giác vuông)

6. 

7. 

8. 

9.  (Đẳng thức hàm Côsin suy rộng)

Một số bất đẳng thức lượng trong tam giác:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

Dấu bằng xảy ra trong các bất đẳng thức trên ABC đều.