Đi tìm lời giải mở rộng cho bài toán

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT,GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

VÕ KIM HUỆ (Cần thơ)

I. Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tậpD ($D \subset R$)

1.Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$ với mọi $x \in D$,thì số M = $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên tập D.

Kí hiệu là M = $\max\limits_{x\in D} f(x)$

2.Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ với mọi $x \in D$,thì số m = $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên tập D.

Kí hiệu là m = $\min\limits_{x\in D} f(x)$

***Nhận xét:** Muốn chứng tỏ rằng M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f(x)$ trên tập D chỉ cần chỉ rõ:*

***1.** $f(x) \le M$ (hoặc $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc D.*

***2.** Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$)*

***Chú ý:** Ta qui ước khi nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói " trên tập D" thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của nó.*

Có thể nhận xét ngay:trên hai tập xác định khác nhau thì GTLN,GTNN có thể khác nhau (vì đó là hai bài tóan khác nhau).

Xét đề thi đại hoc khối A 2013

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{32a^3}{(b+3c)^3} + \dfrac{32b^3}{(a+3c)^3} - \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

Đáp án như sau:

Đặt $x = \dfrac{a}{c},\ y = \dfrac{b}{c}$. Ta được $x > 0,\ y > 0$. Điều kiện của bài toán trở thành $xy + x + y = 3$.

Khi đó $P = \dfrac{32x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2+y^2}$.

Với mọi $u > 0,\ v > 0$ ta có $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) \ge (u+v)^3 - \dfrac{3}{4}(u+v)^3 = \dfrac{(u+v)^3}{4}$.

Do đó $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} \ge 8\left(\dfrac{x}{y+3} + \dfrac{y}{x+3}\right)^3 = 8\left(\dfrac{(x+y)^2 - 2xy + 3x + 3y}{xy + 3x + 3y + 9}\right)^3$.

Thay $xy = 3 - x - y$ vào biểu thức trên ta được

$\dfrac{32x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} \ge 8\left(\dfrac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3 = (x+y-1)^3$. Do đó

$P \ge (x+y-1)^3 - \sqrt{x^2+y^2} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 + 2(x+y) - 6}$.

Đặt $t = x + y$. Suy ra $t > 0$ và $P \geq (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$.

Ta có $3 = x + y + xy \leq (x+y) + \dfrac{(x+y)^2}{4} = t + \dfrac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6) \geq 0$. Do đó $t \geq 2$.

Xét $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$, với $t \geq 2$. Ta có $f'(t) = 3(t-1)^2 - \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$.

Với mọi $t \geq 2$ ta có $3(t-1)^2 \geq 3$ và $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}} = \sqrt{1 + \dfrac{7}{(t+1)^2 - 7}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{7}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, nên

$f'(t) \geq 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 0$. Suy ra $f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}$. Do đó $P \geq 1 - \sqrt{2}$.

Khi $a = b = c$ thì $P = 1 - \sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1 - \sqrt{2}$.

$f'(t) \geq 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 0$. Suy ra $f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}$. Do đó $P \geq 1 - \sqrt{2}$.

Khi $a = b = c$ thì $P = 1 - \sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1 - \sqrt{2}$.

Có rất nhiều lời giải khác nhau cho bài toán trên,tuy nhiên các cách giải đó vẫn tìm GTLN,GTNN của hàm số f(t) trên tập $t \geq 2$.

Nếu để ý rằng khi đặt t=x+y thỏa x+y+xy=3 với x,y>0 thì $2 \leq t < 3$ nên ***cách giải*** trên là sai theo nghĩa *vì tập xác định khác nhau*.

Vấn đề đặt ra là:với một bài toán bất kì,làm thế nào để biết tập xác định của nó,câu trả lời là không đơn giản. Cách làm hợp lí nhất để dễ dàng hơn trong viêc tìm GTLN,GTNN là mở rộng tập xác định trong định lí tìm GTLN,GTNN

Câu trả lời mở rộng cũng không khó khăn lắm:

Để tìm GTLN,GTNN của hàm số y=f(x) trên tập A,ta có thể tìm GTLN,GTNN trên tập $B \supset A$ với điều kiên $\max\limits_{x \in B} f(x) = f(x_0)$ hay $(\min\limits_{x \in B} f(x) = f(x_0))$ thỏa $x_0 \in A$.

Với cách nhìn đó,lời giải của bài toán khối A 2013 mới chấp nhận được.

Bạn có phát hiện các thiếu sót **rất khó thấy** trong các lời giải của các đề thi đại học không ?nhất là các bài toán hình học phẳng!

Mong được thảo luận trên diễn dàn của báo.