ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

Huỳnh Chí Hào

A. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số nhiều biến bằng **phương pháp hàm số,** thông thường ta thực hiện theo các bước sau :

- Biến đổi các số hạng chứa trong biểu thức về cùng một đại lượng giống nhau.
- Đưa vào một biến mới t, bằng cách đặt t bằng đại lượng đã được biến đổi như trên.
- Xét hàm số $f(t)$ theo biến t. Khi đó ta hình thành được bài toán tương đương sau : *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số* $f(t)$ *với* $t \in D$.
- Lúc này ta sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t \in D$.
- **Chú ý** : trong trường hợp không thể xây dựng trực tiếp được hàm số $f(t)$ với $t \in D$, ta có thể đi tìm
  - $f(t)$ với $t \in D$ thỏa $P \geq f(t)$ đối với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất
  - $f(t)$ với $t \in D$ thỏa $P \leq f(t)$ đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

I. XÂY DỰNG TRỰC TIẾP HÀM SỐ $f(t)$ BẰNG CÁC BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ:

Phương pháp chung:

- *Dự đoán khả năng dấu bằng xảy ra hoặc giá trị đặc biệt trong điều kiện để đặt được biến phụ t thích hợp.*
- *Có thể biến đổi được về hàm f(t) không cần sử dụng tính chất bất đẳng thức.*
- *Hàm f(t) tương đối khảo sát được.*
- *Chú ý phần tìm điều kiện của t (phải thật chính xác)*
- *Thích hợp cho các đề thi khối B và D.*

★**Thí dụ 1.** *Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn x + y = 1.*

Tìm GTNN của biểu thức $P=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$

Lời giải.

- Ta biến đổi $P=(xy)^2+\frac{1}{(xy)^2}+2$
- Do $\begin{cases} x,y>0 \\ x+y=1 \end{cases}$ nên $1=x+y\geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0<xy\leq\frac{1}{4}$.
- Đặt $t=(xy)^2$, điều kiện của t là $0<t\leq\frac{1}{16}$
- Khi đó biểu thức $P=f(t)=2+t+\frac{1}{t}$

- $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}$; ta thấy $f'(t)<0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{16}\right]$, suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left(0;\dfrac{1}{16}\right]$

- Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\min P=\min\limits_{t\in(0;\frac{1}{16}]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{289}{16}$.❐

★Thí dụ 2. *(Khối A 2006)* Cho các số thực $x\neq 0,\ y\neq 0$ thỏa $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$.

Tìm GTLN của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

Lời giải.

- Đặt $x+y=S$ và $xy=P$ với $P\neq 0$, từ giả thiết ta có $P=\dfrac{S^2}{S+3}\quad (S\neq -3)$
- x, y tồn tại khi $S^2\geq 4P\Leftrightarrow S^2\geq\dfrac{4S^2}{S+3}\Leftrightarrow\dfrac{4}{S+3}\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{S-1}{S+3}\geq 0\Leftrightarrow S<-3\vee S\geq 1$
- Ta biến đổi $A=\dfrac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\dfrac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3}=\dfrac{(x+y)^2xy}{x^3y^3}=\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\dfrac{S+3}{S}\right)^2$
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{t}$ với $t<-3\ \vee t\geq 1$, ta có $f'(t)=-\dfrac{3}{t^2}<0$
- BBT

t	-∞		-3		1		+∞
$f'(t)$		−	‖		‖	−	
$f(t)$	1	$\searrow$	0		4	$\searrow$	1

- Suy ra $A=f^2(t)\leq 16$
- Vậy GTLN $P=16$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.❐

★Thí dụ 3. *Cho các số thực dương thay đổi x,y thỏa điều kiện $x+y=1$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{xy}$.

Lời giải.

- $P=\dfrac{1}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{(x-y)^3-3xy(x+y)}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{1-3xy}+\dfrac{1}{xy}$
- Đặt $0<t=xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{1-3t}+\dfrac{1}{t}$ với $0<t\leq\dfrac{1}{4}$

$$f'(t)=\frac{3}{(1-3t)^2}-\frac{1}{t^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$$

- BBT

t	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	8

- Suy ra $P \ge f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = 4+2\sqrt{3}$
- Vậy GTLN $P = 4+2\sqrt{3}$ khi $x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$; $y = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)$.❒

★**Thí dụ 4.** *(khối D 2009) Cho các số thực không âm x, y thỏa điều kiện $x+y=1$.*
Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $S=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$

Lời giải.

- Do $x+y=1$ nên
$$\begin{aligned} S &= (4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy \\ &= 16x^2y^2+12(x^3+y^3)+9xy+25xy \\ &= 16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy \\ &= 16x^2y^2-2xy+12 \end{aligned}$$
- Đặt $0 \le t = xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- Xét hàm số $f(t) = 16t^2-2t+12$ với $0 \le t \le \frac{1}{4}$

$f'(t) = 32t-2 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$

t	0		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	12	$\searrow$	$\frac{191}{16}$	$\nearrow$	$\frac{25}{2}$

- Vậy GTLN $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

GTNN $S = \frac{191}{16}$ khi $x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ hoặc $x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.❒

★**Thí dụ 5.** *Cho các số thực thay đổi x, y thỏa điều kiện $y \le 0$ và $x^2+x=y+12$.*
Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = xy+x+2y+17$.

Lời giải.

- Ta có $x^2+x-12 = y \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$

- $P = x(x^2 + x - 12) + x + 2(x^2 + x - 12) + 17 = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$
- Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ với $-4 \le x \le 3$

  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3;\ x = 1$

x	-4		-3		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-13	$\nearrow$	20	$\searrow$	-12	$\nearrow$	20

- Vậy GTLN $P = 20$ khi $x = -3, y = -6$ hoặc $x = 3, y = 0$

  GTNN $P = -12$ khi $x = 1, y = -10$ ❒

★Thí dụ 6. *Cho các số thực $x \ge 0$ và $y \ge 0$ thỏa $x + y = 2$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2 + xy + y^2 + x - 3}{3x - xy + 1}$.

Lời giải.

- $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le 2$
- $P = \dfrac{x^2 + x(2-x) + (2-x)^2 + x - 3}{3x - x(2-x) + 1} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

  $P' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

x	0		1		2
P'		$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	

- Vậy *GTNN* $P = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 1; y = 1$.❒

★Thí dụ 7. *Cho các số thực thay đổi x, y thỏa điều kiện $x + y \ne -1,\ x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$.*

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x + y + 1}$.

Lời giải.

- Từ giả thiết $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \Leftrightarrow xy = (x + y)^2 - (xy) - 1$
- Đặt $t = x + y$, ta có $(x + y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \le t \le 2$. Khi đó $P = \dfrac{t^2 - t - 1}{t + 1}$

- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t-1}{t+1}$ với $-\dfrac{2}{3}\le t<2$

$$f^{/}(t)=\frac{t^2+2t}{(t+2)^2}\Rightarrow f^{/}(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=0\end{array}\right.$$

t	$\frac{-2}{3}$		0		2
$f^{/}(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

- Vậy GTLN $P=\dfrac{1}{3}$ khi $x=y=-\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=y=1$

  GTNN $P=-1$ khi $x=-1,y=1$ hoặc $x=1,y=-1$.❒

★**Thí dụ 8.** *Cho các số thực thay đổi* x,y *thỏa điều kiện* $x,y\neq 0$, $xy(x+y)=x^2+y^2-x-y+2$.

Tìm GTLN của biểu thức $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Lời giải.

- Từ giả thiết suy ra $xy(x+y)=(x+y)^2-2xy-(x+y)+2$

- Đặt $t=x+y$ suy ra $xy=\dfrac{t^2-t+2}{t+2}$

- Ta có $(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\dfrac{t^3-2t^2+4t-8}{t+2}\ge 0\Leftrightarrow t<-2\vee 2\le t$

- Khi đó $P=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{t^2+2t}{t^2-t+2}$

- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t}{t^2-t+2}$ $t<-2\vee 2\le t$ với

$$f^{/}(t)=\frac{-3t^2+4t+4}{(t^2-t+2)^2}\Rightarrow f^{/}(x)=0\Leftrightarrow t=\frac{-2}{3};\ t=2$$

t	$-\infty$		-2	2		$+\infty$
$f^{/}(t)$		$-$			$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{-2}{7}$	2	$\searrow$	1

- Vậy GTLN $P=2$ khi $x=y=1$.❒

★**Thí dụ 9.** *Cho các số thực thay đổi* x,y *thỏa điều kiện* $1-y^2=x(x-y)$.

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P=\dfrac{x^6+y^6-1}{x^3y+xy^3}$.

Lời giải.

- Ta có $1 = x^2 + y^2 - xy \geq xy \Leftrightarrow xy \leq 1$

$$1 = x^2 + y^2 - xy \geq (x+y)^2 - 3xy \Leftrightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$$

- Ta có $P = \dfrac{x^6 + y^6 - 1}{x^3 y + xy^3} = \dfrac{(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^2 - 3x^2y^2\right]}{xy(x^2+y^2)} - \dfrac{1}{xy\left(x^2+y^2\right)}$
- Đặt $t = xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + t$
- $P = \dfrac{-2t^2 + 3}{t+1}$
- Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-2t^2+3}{t+1}$ với $-\dfrac{1}{3} \leq t \leq 1$

$$f^{/}(t) = \frac{-2t^2 - 4t - 3}{(t+1)^2} < 0$$

t	$-\frac{1}{3}$		1
$f^{/}(t)$		$-$	
$f(t)$	$\frac{25}{6}$	↘	$\frac{1}{2}$

- Vậy GTNN $P = f(1) = \dfrac{1}{2}$ khi $x = y = \pm 1$

GTLN $P = f(-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{25}{6}$ khi $x = -y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.❒

★**Thí dụ 10.** *(Khối B 2011)Cho a, b các số thực dương thỏa* $2(a^2+b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$.

Tìm GTNN của biểu thức $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right)$.

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có $2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 1 = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(ab+2) \Rightarrow 2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 1 = a + \dfrac{2}{b} + b + \dfrac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$
- Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \Rightarrow 2t + 1 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t+2} \Rightarrow 4t^2 - 4t - 15 \geq 0 \Rightarrow t \geq \dfrac{5}{2}$
- Ta có $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$
- Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ với $\dfrac{5}{2} \leq t$

$$f^{/}(t) = 12t^2 - 18t - 12 \Rightarrow f^{/}(x) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2};\ t = 2$$

t	$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f^{/}(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{-23}{4}$	↗	$+\infty$

- Suy ra $P \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$
- Vậy GTNN $P = -\frac{23}{4}$ khi $a=1,\ b=2$ hay $a=2,\ b=1$.❒

★**Thí dụ 11.** *Cho các số thực thay đổi x, y thỏa điều kiện $2(x^2+y^2) = xy+1$.*

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{x^4+y^4}{2xy+1}$.

Lời giải.

- Đặt $t = xy$. Ta có: $xy+1 = 2\left((x+y)^2 - 2xy\right) \geq -4xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$
- và $xy+1 = 2\left((x-y)^2 + 2xy\right) \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$. ĐK: $-\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{1}{3}$.
- Suy ra : $P = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x^2y^2}{2xy+1} = \frac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$.
- Do đó: $P' = \frac{7\left(-t^2-t\right)}{2(2t+1)^2}$,

$P' = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -1(L)$ $\qquad P\left(-\frac{1}{5}\right) = P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}$ và $P(0) = \frac{1}{4}$

t	$-\frac{1}{5}$		0		$\frac{1}{3}$
P'	0	$+$	0	$-$	
P	$\frac{2}{15}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{15}$

- Vậy GTLN là $\frac{1}{4}$ và GTNN là $\frac{2}{15}$.❒

★**Thí dụ 12.** *Cho các số thực a,b,c thỏa $abc = 2\sqrt{2}$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu $P = \frac{a^6+b^6}{a^4+b^4+a^2b^2} + \frac{b^6+c^6}{b^4+c^4+b^2c^2} + \frac{c^6+a^6}{c^4+a^4+c^2a^2}$

Lời giải.

- Ta có $P = \frac{(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)}{a^4+b^4+a^2b^2} + \frac{(b^2+c^2)(b^4+c^4-b^2c^2)}{b^4+c^4+b^2c^2} + \frac{(c^2+a^2)(c^4+a^4-c^2a^2)}{c^4+a^4+c^2a^2}$
- Nhận xét: Do $abc = 2\sqrt{2}$ nên a^2, b^2, c^2 là các số thực dương
- Xét A = $A = \frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$ với *x,y > 0*
- Chia tử và mẫu cho y^2 và đặt $t = \frac{x}{y}$ ta được $A = \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$ với t > 0
- Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}$ với $0 < t$ $\Rightarrow f'(t) = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	

- Suy ra $P \ge \frac{1}{3}(a^2+b^2)+\frac{1}{3}(b^2+c^2)+\frac{1}{3}(c^2+b^2)=\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=4$
- Vậy GTNN $P=4$ khi $a=b=c=\sqrt{2}$.❒

★**Thí dụ 13.** *Cho hai số thực x, y thỏa mãn* $x\ge 1,\ y\ge 1$ *và* $3(x+y)=4xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$.

Lời giải.

- Đặt $x+y=a$. Khi đó $xy=\frac{3a}{4},\ a>0$.
- Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $t^2-at+\frac{3a}{4}=0$ (1)
- Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=a^2-3a\ge 0 \Rightarrow a\ge 3$.
- Vì $x, y\ge 1$ nên $(x-1)(y-1)\ge 0$. Hay là $xy-(x+y)+1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3a}{4}-a+1\ge 0 \Leftrightarrow a\le 4$.
- Vậy ta có $3\le a\le 4$.
- Mặt khác, từ giả thiết ta lại có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}$.
- Suy ra $P=(x+y)^3-3xy(x+y)+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{6}{xy}=a^3-\frac{9}{4}a^2-\frac{8}{a}+\frac{16}{3}$.
- Xét hàm số $f(a)=a^3-\frac{9}{4}a^2-\frac{8}{a}+\frac{16}{3},\ 3\le a\le 4$.
- Ta có $f'(a)=3a^2-\frac{9}{2}a+\frac{8}{a^2}=3a(a-\frac{3}{2})+\frac{8}{a^2}>0,\ \forall a\in[3;4]$.

a	3 4		
$f'(a)$		$+$	
$P=f(a)$	$\dfrac{113}{12}$	$\nearrow$	$\dfrac{94}{3}$

- Dựa vào BBT ta suy ra $\min P=\frac{113}{12}$, đạt khi $a=3 \Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$;

$\max P=\frac{94}{3}$, đạt khi $a=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=3 \\ x=3,\ y=1. \end{array}\right.$.❒

★**Thí dụ 14.** *Cho các số thực không âm x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+yz+zx+\dfrac{5}{x+y+z}$.

Lời giải.

- Đặt $t=x+y+z \Rightarrow t^2=3+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=\dfrac{t^2-3}{2}$.
- Ta có $0\le xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=3$ nên $3\le t^2\le 9 \Rightarrow \sqrt{3}\le t\le 3$ vì $t>0$.
- Khi đó $A=\dfrac{t^2-3}{2}+\dfrac{5}{t}$.
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{5}{t}-\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\le t\le 3$.
- Ta có $f'(t)=t-\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{t^3-5}{t^2}>0$ vì $t\ge\sqrt{3}$.
- Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[\sqrt{3},\,3]$. Do đó $f(t)\le f(3)=\dfrac{14}{3}$.
- Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=3 \Leftrightarrow x=y=z=1$.
- Vậy GTLN của A là $\dfrac{14}{3}$, đạt được khi $x=y=z=1$.❒

★**Thí dụ 15.** *Cho hai số thực x thỏa mãn $0<x\le 1,\ 0<y\le 1$ và $x+y=4xy$.*

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^2+y^2-7xy$.

Lời giải.

- Đặt $xy=t \Rightarrow x+y=4t$. Theo định lí Viet đảo $x,\ y$ là nghiệm của phương trình
$$h(X)=X^2-4tX+t=0.$$
- Vì $0<x_1,x_2\le 1$ nên phương trình $h(X)=0$ có nghiệm X_1,X_2 thoả mãn
$$0<X_1\le X_2\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4t^2-t\ge 0\\ 1.h(0)=t<0\\ 1.h(1)=1-3t\ge 0\\ 0<\dfrac{S}{2}=2t\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le t\le\dfrac{1}{3}.$$
- Khi đó $M=(x+y)^2-9xy=16t^2-9t$, với $\dfrac{1}{4}\le t\le\dfrac{1}{3}$.
- Ta có $M'(t)=32t-9\ge 0 \Leftrightarrow t\ge\dfrac{9}{32}\in\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right)$. Suy ra Bảng biến thiên

t	$1/4$		$9/32$		$1/3$
M'(t)		-	0	+	
M	$-\dfrac{5}{4}$	↘	$-\dfrac{81}{64}$	↗	$-\dfrac{11}{9}$

- Suy ra: $M_{max} = -\frac{11}{9}$, đạt khi $xy = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{3}$ hoặc $x = \frac{1}{3}, y = 1$.

  $M_{min} = -\frac{81}{64}$, đạt khi $xy = \frac{9}{32} \Rightarrow x = 2y = \frac{3}{4}$ hoặc $y = 2x = \frac{3}{4}$.❒

★**Thí dụ 16.** *Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$.*

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4 + 4xy - x^3y^3$

Lời giải.

- Điều kiện: $x \ge -1; y \ge 3$.
- Đặt $u = \sqrt{x+1} \ge 0; v = -\sqrt{y-3} \le 0$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^2+v^2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ uv = \dfrac{a^2-2a}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$ là nghiệm của ph□ơng trình $f(t) = t^2 - at + \frac{a^2-2a}{2} = 0$.

- Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ ph□ơng trình $f(t) = 0$ có nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1 \le 0 \le t_2$

$$\Leftrightarrow 1.f(0) \le 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a}{2} \le 0 \Leftrightarrow 0 \le a \le 2.$$

- Đặt $t = xy$. Từ giả thiết $x^2 + y^2 + xy = 3$ ta có:

  +) $3 = (x+y)^2 - xy \ge -xy \quad \Rightarrow xy \ge -3$.

  +) $3 = x^2 + y^2 + xy \ge 3xy \quad \Rightarrow xy \le 1$. Vậy $-3 \le t \le 1$.

  +) $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (3-xy)^2 - 2x^2y^2 = 9 - 6xy - x^2y^2$.

  Suy ra $A = -t^3 - t^2 - 2t + 9, \ -3 \le t \le 1$.

- Xét hàm số $f(t) = -t^3 - t^2 - 2t + 9, \quad -3 \le t \le 1$.

  $f'(t) = -3t^2 - 2t - 2 < 0, \ \forall t$. Vậy hàm số nghịch biến trên □ , nên:

  $\min\limits_{-3 \le t \le 1} f(t) = f(1) = 5; \ \max\limits_{-3 \le t \le 1} f(t) = f(-3) = 33$

- Để ý rằng $t = 1 \Leftrightarrow x = y = \pm 1$ và $t = -3 \Leftrightarrow x = -y = \pm\sqrt{3}$
- Vậy $\min A = 5$, đạt khi $x = y = \pm 1$

  $\max A = 33$, đạt khi $x = -y = \pm\sqrt{3}$.❒

★**Thí dụ 17.** *(khối B 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

Lời giải.

Cách 1:

- $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = (x+y)^2 - \dfrac{1}{2} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \le x+y \le \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$

- P = $x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + y^5 - (x + y)^5 = -5xy(x^3 + y^3) - 10x^2y^2(x + y)$

  $= -\frac{5}{2}\left[(x+y)^3 - \frac{1}{2}(x+y)\right] = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t$; t = x + y

- f(t) = $-\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t$

$f'(t) = -\frac{15}{2}t^2 + \frac{5}{4}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

t	$-\sqrt{2/3}$		$-1/\sqrt{6}$		$1/\sqrt{6}$		$\sqrt{2/3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$5\sqrt{6}/36$		$\frac{-5\sqrt{6}}{36}$		$\frac{5\sqrt{6}}{36}$		

- Suy ra $P \le 5\sqrt{6}/36$. Vậy max $P = 5\sqrt{6}/36$ xảy ra khi $t = 1/\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1/\sqrt{6} \\ xy = -1/3 \\ z = -(x+y) \end{cases}$ (có nghiệm) hay $\begin{cases} x+y = -\sqrt{2/3} \\ xy = 1/6 \\ z = -(x+y) \end{cases}$ (có nghiệm) ❒

Cách 2:

- Với $x + y + z = 0$ và $x^2+y^2+z^2=1$, ta có:

  $0=(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz = 1-2x^2+2yz$, nên $yz = x^2-\frac{1}{2}$.

- Mặt khác $yz \le \frac{y^2+z^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}$, suy ra $x^2-\frac{1}{2} \le \frac{1-x^2}{2}$, do đó $-\frac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{6}}{3}$ (*)
- Khi đó: $P = x^5+(y^2+z^2)(y^3+z^3)-y^2z^2(y+z)$

  $= x^5+(1-x^2)\left[(y^2+z^2)(y+z)-yz(y+z)\right]+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x$

  $= x^5+(1-x^2)\left[-x(1-x^2)+x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x = \frac{5}{4}(2x^3-x)$

- Xét hàm $f(x) = 2x^3-x$ trên $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, suy ra $f'(x)=6x^2-1$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$
- Ta có $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$, $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$. Do đó $f(x) \le \frac{\sqrt{6}}{9}$.

  Suy ra $P \le \frac{5\sqrt{6}}{36}$.

- Khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ thì dấu bằng xảy ra.
- Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$. ❒

★**Thí dụ 18.** *Cho 2 số thực x, y thỏa mãn :* $x+y = 2\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}+1$.

Tìm GTLN, GTNN của $F = \frac{x}{2}(x-y)+\frac{y}{2}(y-x)+\frac{2(1+xy\sqrt{x+y})}{\sqrt{x+y}}$.

Lời giải.

- Từ giả thiết $\Rightarrow x \ge 2; y \ge -1$.
- Vì $\left(2.\sqrt{x-2}+1.\sqrt{y+1}\right)^2 \le \left(2^2+1^2\right)(x-2+y+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1} \le \sqrt{5(x+y-1)}$.

  Nên từ $x+y=2\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}+1$

  $\Rightarrow x+y \le \sqrt{5(x+y-1)}+1$. Đặt t = x + y , ta có: $t-1 \le \sqrt{5(t-1)} \Leftrightarrow 1 \le t \le 6$
- Khi đó: F = $\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{2}{\sqrt{x+y}}=\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{t}}$.
- Xét $f(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{t}}$, với $t \in [1;6]$, có $f'(t)=t-\frac{1}{t\sqrt{t}} \ge 0; \forall t \in [1;6]$

  $\Rightarrow \underset{t\in[1;6]}{Min} f(t) = f(1) = \frac{5}{2}$; $\underset{t\in[1;6]}{Max} f(t) = f(6) = 18+\frac{2}{\sqrt{6}}$

  $\Rightarrow$ GTNN của F là: $\frac{5}{2}$ đạt được tại: $t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$
- Vậy GTLN của F là $18+\frac{2}{\sqrt{6}}$ đạt được tại :t= 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$ ❒

★**Thí dụ 19.** *Cho x và y là các số thực thỏa mãn: $1-y^2=x(x-y)$.*

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^6+y^6-1}{x^3y+xy^3}$

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có:

$$1=x^2+y^2-xy \ge 2xy-xy \quad \Leftrightarrow xy \le 1.$$

$$1=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy \ge -3xy \quad \Leftrightarrow xy \ge \frac{-1}{3}.$$

- Ta có $x^2+y^2=1+xy$ nên $x^6+y^6=(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2\right]$
- Đặt $t=xy$ với $t \in \left[-\frac{1}{3};1\right] \backslash \{0\}$. Khi đó ta được P$=\frac{(1+t)\left[(1+t)^2-3t^3\right]-1}{t(1+t)}$
- Hay P$=\frac{-2t^2+3}{t+1}=f(t)$
- Hàm số $f(t)$ trên $\left[-\frac{1}{3};1\right] \backslash \{0\}$
- Ta có $f'(t)=\frac{-2t^2-4t-3}{(t+1)^2}<0 \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{3};1\right] \backslash \{0\}$
- Vậy $MinP=P(1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y=\pm 1$

  $MaxP=P(-\frac{1}{3})=\frac{25}{6} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ❒

★**Thí dụ 20.** *Cho x,y,z thuộc đoạn $[0;2]$ và $x+y+z=3$.*

Tìm giá trị lớn nhất của $A=x^2+y^2+z^2$

Lời giải.

- Cho x,y,z thuộc $[0;2]$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=x^2+y^2+z^2$
- Giả sử: $x \le y \le z \Rightarrow 3=x+y+z \le 3z \Rightarrow z \ge 1 \Rightarrow z \in [1;2]$

- Lại có:

$$x^2 + y^2 \le (x+y)^2, (*)$$
$$\Rightarrow A \le (3-z)^2 + z^2 = 2z^2 - 6z + 9$$

- Xét $f(z) = 2z^2 - 6z + 9, z \in [1;2] \Rightarrow f'(z) = 4z - 6, f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$

$$f(1) = 5; f(2) = 5; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

- Kết hợp (*) ta có
- Vậy $\max A = 5$ khi $x = 0; y = 1; z = 2$ ❒

II. XÂY DỰNG GIÁN TIẾP HÀM SỐ $f(t)$ BẰNG SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT ĐẲNG THỨC:

Phương pháp chung:

- *Dự đoán khả năng dấu bằng xảy ra hoặc giá trị đặc biệt trong điều kiện để đặt được biến phụ t thích hợp.*
- *Khả năng biến đổi được về hàm f(t)là khó buộc phải sử dụng bất đẳng thức.*
- *Lưu ý khi sử dụng bất đẳng thức điều kiện dấu bằng xảy ra phải đúng*
- *Cần thuộc một số bất đẳng thức phụ để có thể đưa về theo một đại lượng thích hợp nào đó theo ý mong muốn.*
- *Hàm f(t) tương đối khảo sát được.*
- *Chú ý phần tìm điều kiện của t (phải thật chính xác)*
- *Thích hợp cho các đề thi khối A và B.*

★**Thí dụ 1.** *(Khối B 2009) Cho các số thực thay đổi thỏa* $(x+y)^3+4xy\geq 2$.
Tìm GTNN của biểu thức $P=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$.

Lời giải.

- Ta có $(xy)^2\leq\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2$
- $P\geq 3\left[(x^2+y^2)^2-\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right]-2(x^2+y^2)+1$
- Đặt $t=x^2+y^2\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}\geq\dfrac{1}{2}$ (theo giả thiết $(x+y)^3+(x+y)^2\geq(x+y)^3+4xy\geq 2$)
- Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9t^2}{4}-2t+1$ với $t\geq\dfrac{1}{2}$

$$f'(t)=\frac{9t}{2}-2$$

x	$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$		+
$f(t)$	$\frac{9}{16}$	↗

- Suy ra $P\geq f(t)\geq f(\frac{1}{2})=\dfrac{9}{16}$
- Vậy GTNN $P=\dfrac{9}{16}$ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.❒

★**Thí dụ 2.** *(Khối B 2010) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa* $a+b+c=1$.
Tìm GTNN của biểu thức $P=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải.

- Ta biến đổi $P\geq(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{1-2(ab+bc+ca)}$
- Đặt $t=ab+bc+ca$, điều kiện $0\leq t=ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$

- Xét hàm số $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}, \forall t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$, ta có

$$f'(t)=2t+3-\frac{2}{\sqrt{1-2t}}$$

$$f''(t)=2-\frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}\le 0$$

Do vậy $f'(t)$ là hàm nghịch biến: $f'(t)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}-2\sqrt{3}>0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến

- BBT

t	0	$\frac{1}{3}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	2 $\nearrow$	$\frac{10+6\sqrt{3}}{9}$

- Suy ra $P\ge f(t)\ge f(0)=2$
- Vậy GTNN $P=2$ khi $\begin{cases} ab=bc=ca \\ ab+bc+ca=0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ khi $(1;\,0;\,0)$ và các hoán vị. ❒

★**Thí dụ 3.** *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3.*
Tìm GTLN của biểu thức $P=3(a^2+b^2+c^2)+4abc$.

Lời giải.

- Giả sử $0<a\le b\le c\Rightarrow 1\le c<\frac{3}{2}$
- Ta có $P=3(a+b)^2-6ab+3c^2+4abc=3(3-c)^2+3c^2-2(3-c)ab$

$$\ge 3(3-c)^2+3c^2-2(3-c)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=3(3-c)^2+3c^2-2(3-c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$$

$$=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}$$

- Xét hàm số $f(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{27}{2}$ với $1\le t<\frac{3}{2}$

$$f'(t)=3c^2-3c$$

- BBT:

t	0		1		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	13	$\nearrow$	

- Suy ra $P \geq f(1) = 13$
- Vậy GTNN $P = 13$ khi $a = b = c = 1$.❐

★Thí dụ 4. *Cho các số dương x, y, z thỏa $x + y + z \leq 1$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Lời giải.

- Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$1 \geq x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$$

- Suy ra $P \geq 3\sqrt[3]{xyz} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$
- Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{3}{t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{3}$

$$f'(t) = 3 - \frac{3}{t^2} = \frac{3 - 3t^2}{t^2} < 0$$

x	0		$\frac{1}{3}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$			10

- Suy ra $P \geq f(t) \geq f(\frac{1}{3}) = 10$
- Vậy GTNN $P = 10$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

★Thí dụ 5. *(Khối A 2003) Cho các số dương x, y, z thỏa $x + y + z \leq 1$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$.

Lời giải.

- Ta có $P \geq \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \geq 3\sqrt{(3\sqrt[3]{xyz})^2 + \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)^2}$
- Xét hàm số $f(t) = 9t + \frac{9}{t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{9}$ $\quad 0 < t \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$$f'(t) = 9 - \frac{9}{t^2} = \frac{9 - 9t^2}{t^2} < 0$$

x	0		$\frac{1}{9}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$			$\sqrt{82}$

- Suy ra $P \geq \sqrt{f(t)} \geq \sqrt{f(\frac{1}{9})} = \sqrt{82}$
- Vậy GTNN $P = \sqrt{82}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.❒

★**Thí dụ 6.** *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa* $a+b+c=3$.
Tìm GTLN của biểu thức $P=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$.

Lời giải.

- Giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$
- Suy ra $\begin{cases} a(a-b) \leq 0 \\ a(a-c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-ab+b^2 \leq b^2 \\ a^2-ac+c^2 \leq c^2 \end{cases}$
- Do đó $P \leq b^2c^2(b^2-bc+c^2) = b^2c^2\left[(b-c)^2-3bc\right]$
- Từ $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 0 \leq a \leq b \leq c \leq 3 \end{cases}$ ta có $b+c \leq a+b+c \Rightarrow b+c \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{bc} \leq b+c \leq 3$
- Suy ra $0 \leq bc \leq \frac{9}{4}$
- Từ đó ta có $P \leq b^2c^2(9-3bc)$
- Xét hàm số $f(t) = -3t^3 - 9t^2$ với $0 \leq t < \frac{9}{4}$

  $f'(t) = -9t^2 + 18t$

t	0		2		$\frac{9}{4}$
$f'(x)$	0	+	0	–	
$f(x)$		↗	12	↘	

- Suy ra $P \leq f(2) = 12$
- Vậy GTLN $P = 12$ khi $a = 0;\ b = 1;\ c = 2$ và các hoán vị. ❒

★**Thí dụ 7.** *Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thuộc* $[0;\ 2]$.

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$.

Lời giải.

- Giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq 2$
- Từ $\begin{cases} 0 < c-a \leq 2 \\ 0 < c-b \leq 2-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(c-a)^2} \geq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{(b-c)^2} \geq \dfrac{1}{(2-b)^2} \end{cases}$
- Suy ra $P \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(2-b)^2} + \frac{1}{4}$

- Xét hàm số $f(b)=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{(2-b)^2}+\dfrac{1}{4}$ với $0<b<2$

$$f'(b)=-\frac{2}{b^3}+\frac{2}{(2-b)^3}$$

b	0		1		2
$f'(b)$	0	$-$	0	$+$	
$f(b)$		↘	$\frac{9}{4}$	↗	

- Suy ra $P\ge f(1)=\dfrac{9}{4}$
- Vậy GTNN $P=\dfrac{9}{4}$ khi $a=0;\ b=1;\ c=2$ và các hoán vị. ❒

★**Thí dụ 8.** *Cho các số dương x,y thỏa $x+y=1$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y}}$.

Lời giải.

- Áp dụng BĐT $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $P=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
- Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ với $0<x<1$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\sqrt{2}$	↘	

- Suy ra $P\le f(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$
- Vậy GTNN $P=\sqrt{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.❒

★**Thí dụ 9.** *(Khối B 2006) Cho các số thực thay đổi $x,\ y$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$

Lời giải.

- Ta có BĐT $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

$$P\ge\sqrt{(1-x+x+1)^2+(y+y)^2}+|y-2|=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$$

- Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$
- Trường hợp $y-2<0 \Leftrightarrow y<2$

$$f(y)=2\sqrt{1+y^2}-y$$

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$$

$$\Rightarrow f'(y)=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $f(y)\ge f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2+\sqrt{3}$

- Trường hợp $y-2\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 2$

y	$-\infty$		2
$f'(y)$		$-$	
$f(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\sqrt{3}$

$$f(y)\ge 2\sqrt{1+y^2}\ge 2\sqrt{1+2^2}>2+\sqrt{3}$$

- Vậy GTNN $P=2+\sqrt{3}$ khi $x=0,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.❒

★**Thí dụ 10.** *Cho các số dương x,y,z thỏa $x+y+z\le 3$.*

Tìm GTLN của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$.

Lời giải.

- Áp dụng BĐT côsi, ta có

$$x^2+y^2+z^2+1\ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(z^2+1)\ge \frac{1}{4}(x+y+z+1)^2$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)\le \left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3$$

- Suy ra $P\le \frac{2}{x+y+z+1}-\frac{54}{(x+y+z+3)^3}$
- Đặt $t=x+y+z+1>1$

$$P\le \frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}$$

- Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}$ với $1<t$

$$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1;\ t=4$$

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

- Suy ra $P \le f(4) = \dfrac{1}{4}$
- Vậy GTLN $P = \dfrac{1}{4}$ khi $x = y = z = 1.$❒

★Thí dụ 11. *Cho các số dương x, y, z . Tìm GTLN của biểu thức* $P = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}$

Lời giải.

- Đặt $a = \dfrac{y}{x}, b = \dfrac{z}{y}, c = \dfrac{x}{z} \Rightarrow abc = 1$
- Suy ra $P = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \sqrt{2\left(\dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2}\right)}$

$$\le \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+bc}} \le \frac{\sqrt{2}}{1+x} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{1+x}}$$

- Đặt $t = \dfrac{1}{1+x}$ với $0 < t \le \dfrac{1}{2}$
- Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{2} + 2\sqrt{1-t}$

$$f'(t) = \frac{\sqrt{2-2t} - 1}{\sqrt{t-1}} \ge 0$$

t	0		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$

- Suy ra $P \le f(\frac{1}{2}) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- Vậy GTLN $P = \dfrac{1}{4}$ khi $x = y = z = 1.$❒

★Thí dụ 12. *Cho các số dương x, y, z thỏa $x + y + z = 3.$*

Tìm GTNN của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{xy + yz + zx}{x^2y + y^2z + z^2x}$.

Lời giải.

- Ta có $3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$
- Mà $\begin{cases} a^3 + ab^2 \ge 2a^2b \\ b^3 + bc^2 \ge 2b^2c \\ c^3 + ca^2 \ge 2c^2a \end{cases} \Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a) > 0$
- Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$
- $P \ge x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{9 - (x^2+y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)} = t + \dfrac{9-t}{2t}$
- Xét hàm số $f(t) = t - \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2t}$ với $3 \le t$

$$f'(t) = 1 - \frac{9}{2t^2}$$

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	4 $\nearrow$ $+\infty$

- Suy ra $P \le f(4) = \frac{1}{4}$
- Vậy GTLN $P = \frac{1}{4}$ khi $x = y = z = 1$.❒

★Thí dụ 13. *Cho các số không âm x, y, z thỏa $x + y + z > 0$.*

Tìm GTNN của biểu thức $P = \dfrac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$

Lời giải.

- Ta có $x^3 + y^3 \ge \dfrac{(x+y)^3}{4}$ dựa vào phép chứng minh tương đương
- Đặt $x + y + z = a$, khi đó
$$4P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3} \ge \frac{(x+y)^3 + 64z^3}{a^3} = \frac{(a-z)^3 + 64z^3}{a^3}$$
- Đặt $t = \dfrac{z}{a}$
- Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 64t^3$ với $0 \le t \le 1$
$$f'(t) = 3\left[64t^2 - (1-t)^2\right] \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9}$$

t	0		$\frac{1}{9}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{64}{81}$	$\nearrow$	

- Suy ra $P \ge \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}$
- Vậy GTNN $P = \frac{16}{81}$ khi $x = y = 4z$.❒

★Thí dụ 14. *(Khối B 2007) Cho các số thực dương x, y, z.*

Tìm GTNN của biểu thức $P = x\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{yz}\right) + y\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{zx}\right) + z\left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{xy}\right)$.

Lời giải.

- Ta có $P=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$
- Do $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

$$P\ge\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}\right)$$

- Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}$ với $t\ge\frac{1}{2}$

$$f'(t)=t-\frac{1}{t^2}$$

x	1
$f'(t)$	+
$f(t)$	$\frac{3}{2}$ ↗

- Vậy GTNN $P=\frac{9}{2}$ khi $x=y=z=1$.❐

★**Thí dụ 15.** *(Khối A 2011)Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1;4] và* $x\ge y, x\ge z$ *.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{z+y}+\frac{z}{z+x}$.

Lời giải.

- Ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $a>0, b>0$ và $ab\ge 1$ (chứng minh tương đương)
- Khi đó $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}\ge\frac{1}{2+\frac{3y}{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$
- Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}}$ với $1\le t\le 2$
- Suy ra $P\ge\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$
- Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$ với $1\le t\le 2$

$$f'(t)=\frac{-2\left[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2}<0$$

t	1		2
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$		↘	$\frac{34}{33}$

- Suy ra $P \geq f(2) = \dfrac{34}{33}$

- Vậy GTNN $P = \dfrac{34}{33}$ khi $x = 4;\ y = 1;\ z = 2$.❒

★Thí dụ 16. *Cho các số thực dương a, b, c.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \dfrac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Lời giải.

- Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$a^2+b^2+c^2+1 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+1)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2,$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3.$$

- Suy ra $P \leq \dfrac{2}{a+b+c+1} - \dfrac{54}{(a+b+c+3)^3}$.

- Đặt $t = a+b+c+1,\ t > 1$. Khi đó ta có $P \leq \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3}$.

- Xét hàm $f(t) = \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{54.3}{(t+2)^4} = 0 \Leftrightarrow 9t = (t+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.;\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$

Suy ra BBT

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

- Dựa vào BBT suy ra $P \leq \dfrac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

- Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{4}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.❒

★Thí dụ 17. *(khối D-2012) Cho các số thực x, y thỏa mãn* $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

Lời giải.

- $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

- $4xy \leq (x+y)^2 \Rightarrow -6xy \geq -\dfrac{3}{2}(x+y)^2$

- A = $x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 6xy - 3(x+y) + 6$

- $A \geq (x+y)^3 - \dfrac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$

- Đặt t = x + y ($0 \le t \le 8$), xét f(t) = $t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6 \Rightarrow$ f'(t) = $3t^2 - 3t - 3$

  f'(t) = 0 khi t = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; f(0) = 6, f(8) = 398, f($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) = $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

- Vậy giá trị nhỏ nhất của f(t) là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ xảy ra khi t = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- A ≥ f(t) ≥ $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ và $x + y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hay $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ❒

BÀI TẬP

Bài 1: Cho *x, y, z* là ba số thực thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Hướng dẫn : đặt $t = x + y + z$

Bài 2: Cho các số dương x, y, z thỏa $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = 9xy + 10xz + 22yz$$

Hướng dẫn :

$$P = 9xy + 10(x+y)z + 12yz = 9xy + 10(x+y)[3-(x+y)] + 12y[3-(x+y)]$$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t$ với $0 \le t \le 3$

$$P = 10f(x+y) + 12f(y) - 22xy \le \max f(t)$$

Bài 3: Cho các số dương x, y, z thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = 6(y + z - x) + 27xyz$$

Hướng dẫn :

$$P \le 6\left[\sqrt{2(y^2+z^2)} - x\right] + 27x\frac{y^2+z^2}{2} = 6\left[\sqrt{2(1-x^2)} - x\right] + 27\frac{x(1-x^2)}{2}$$

Bài 4: Cho các số dương x, y, z thỏa $21xy + 2yz + 8zx \le 12$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$$

Hướng dẫn :

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$, bài toán đưa về tìm GTNN $P = a + b + c$ với $c \ge \frac{2a+4b}{2ab-7}$

$$P \ge a + b + \frac{2a + 4b - \frac{14}{a} + \frac{14}{a}}{a\left(2b - \frac{7}{a}\right)} \ge a + b + \frac{2}{a} + \frac{2a + \frac{14}{a}}{2ab-7} = a + \frac{11}{2a} + \frac{2ab-7}{2a} + \frac{2a + \frac{14}{a}}{2ab-7}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{11}{2t} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{t^2}}$

Bài 5: Cho các số thực x, y, z không đồng thời bằng 0 thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}$$

Hướng dẫn :

Đặt $a = \frac{4x}{x+y+z}$, $b = \frac{4y}{x+y+z}$, $c = \frac{4z}{x+y+z}$. Khi đó $a + b + c = 4$ và $ab + bc + ca = 4$

Áp dụng BĐT $(b+c)^2 \geq 4bc$ suy ra $0 \leq a \leq \dfrac{8}{3}$

Khi đó $P = \dfrac{1}{32}(a^3+b^3+c^3) = \dfrac{1}{32}(3a^3-12a^2+12a+16)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{32}(3t^3-12t^2+12t+16)$

Bài 6: Cho các số dương x, y, z thỏa $(x+y+z)^3 = 32xyz$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$$

Hướng dẫn :

Do tử và mẫu cùng bậc nên giả sử $x+y+z=4$

Ta có $x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$$= \left[(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)\right]^2 - 2\left[(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)\right]$$

Đặt $t = xy+yz+zx$

Xét hàm số $f(t) = (16-2t)^2 - 2(t^2-16)$

Bài 7: Cho các số dương x, y, z thỏa $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{7}$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$$

Hướng dẫn :

Do tử và mẫu cùng bậc nên giả sử $x+y+z=1$

Từ giả thiết $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{xy+yz+zx}{1-2(xy+yz+zx)} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow xy+yz+zx = \dfrac{1}{9} \Rightarrow xy = \dfrac{2}{9} - (1-z)z$

Ta có $x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$$= \left[(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)\right]^2 - 2\left[(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)\right]$$

Xét hàm số theo biến z và $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow 0 < z \leq \dfrac{1}{3}$

Bài 8: Cho các số dương x, y, z . Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{2(x+y+z)^3 + 9xyz}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

Hướng dẫn :

Do tử và mẫu cùng bậc nên giả sử $x+y+z=1$ và $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow 0 < z \leq \dfrac{1}{3}$