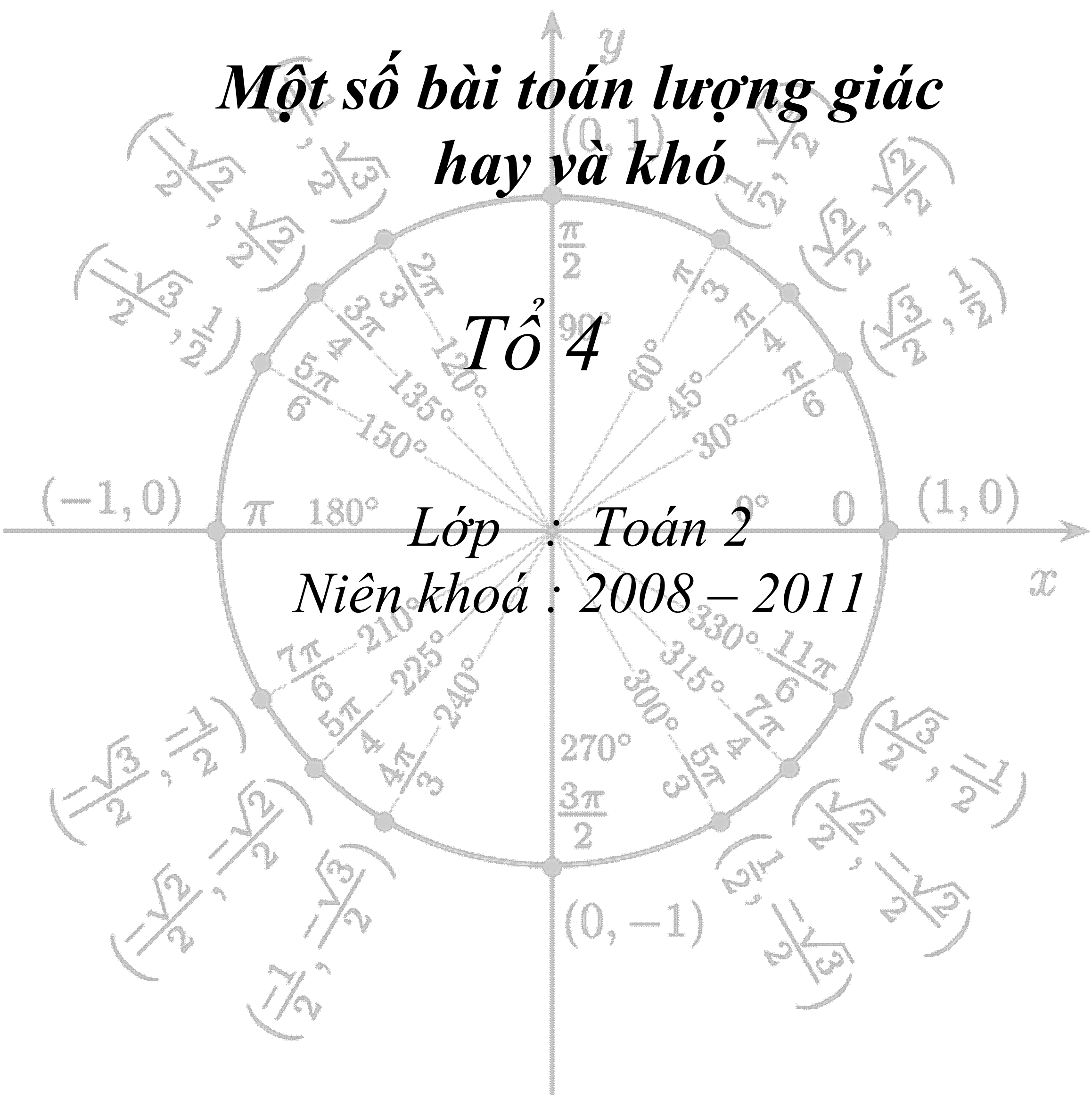
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH PHÚ YÊN
Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh

<u>ĐỀ TÀI KHOA HỌC :</u>



Một số bài toán lượng giác hay và khó

Tổ 4

Lớp : Toán 2
Niên khoá : 2008 – 2011

Tp.Tuy Hoà, tháng 1 năm 2010

<u>Mục lục :</u>

CHƯƠNG I:

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Bài 1: *Cho* $S_n = \tan^2\frac{a}{2}\tan a + 2\tan^2\frac{a}{2^2}\tan\frac{a}{2} + ... + 2^{n-1}\tan^2\frac{a}{2^n}\tan\frac{a}{2^{n-1}}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Giải:

Ta có $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\Leftrightarrow \tan 2x - \tan 2x\tan^2 x = 2\tan x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x\tan 2x = \tan 2x - 2\tan x \qquad (1)$$

Thay vào (1) rồi cộng vế theo vế, ta được:

$$+\begin{cases} \tan^2\frac{a}{2}\tan a = \tan a - 2\tan\frac{a}{2} \\ 2\tan^2\frac{a}{2^2}\tan\frac{a}{2} = 2\tan\frac{a}{2} - 2^2\tan\frac{a}{2^2} \\ 2^2\tan^2\frac{a}{2^3}\tan\frac{a}{2^2} = 2^2\tan\frac{a}{2^2} - 2^3\tan\frac{a}{2^3} \\ \text{...} \\ 2^{n-1}\tan^2\frac{a}{2^n}\tan\frac{a}{2^{n-1}} = 2^{n-1}\tan\frac{a}{2^{n-1}} - 2^n\tan\frac{a}{2^n} \end{cases}$$

$$S_n = \tan a - 2^n\tan\frac{a}{2^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \tan a - \lim_{n\to\infty}\left(2^n\tan\frac{a}{2^n}\right)$$

$$S_n = \tan a - a$$

Bài 2: *Cho* $P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}....\cos\frac{x}{2^n}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

Giải:

Từ $\sin 2a = 2\sin a\cos a \Rightarrow \cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}, \cos\frac{x}{2^2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}} \\ \cos\frac{x}{2^3} = \frac{\sin\frac{x}{2^2}}{\sin\frac{x}{2^3}}, \text{.......................} \\ \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} \end{cases}$$

Nhân vế theo vế ta được: $P_n = \dfrac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2^n}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\right) x} = \frac{\sin x}{x}$$

Bài 3: *Rút gọn biểu thức:*

$$A_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.......\sqrt{2}}}}}_{n}$$

Giải:

Ta có với n=1:

$$A_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$$

Ta sẽ chứng minh: $A_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ *(*)*

Với n=1 , đẳng thức đúng

Giả sử (*) đúng tới n=k, tức là :

$$A_k = 2\cos\frac{\pi}{2^k}$$

Ta chứng minh (*) đúng với n=k+1, tức là

$$A_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Thật vậy:

$$A_{k+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+....\sqrt{2}}}}_{k+1}$$

$$= \sqrt{2+A_k}$$

$$= \sqrt{2(\cos 2\pi + \cos\frac{\pi}{2^k}}$$

$$= \sqrt{4\cos(\frac{\pi}{2^{k+1}}+\pi)\cos(\frac{\pi}{2^{k+1}}-\pi)}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} \quad \textit{(đpcm)}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp, ta có :

$$A_n = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$$

Bài 4: *Cho vài (hoặc tất cả) các số* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *bằng +1 và các số còn lại của chúng bằng -1. Chứng tỏ rằng:*

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$

$$=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+...+a_n\sqrt{2}}}}$$

Chẳng hạn với $a_1=a_2=a_3=.....=a_n=1$ *ta được:*

$$2\sin(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2^{n-1}})45^\circ=2\cos\frac{45^\circ}{2^{n-1}}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+....\sqrt{2}}}}_{n}$$

Giải:

Ta sẽ tiến hành từ công thức nửa góc:

$2\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{2-2\cos\alpha}$ *trong đó dấu "+" hoặc" – "được chọn cho phù hợp với qui luật về dấu của hàm sin. Sử dụng công thức này ta lần lượt định được sin các góc:*

$$a_1 45^\circ;\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}\right)45^\circ;\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}\right)45^\circ;.....;\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$

Giả sử ta đã xác định được sin góc:

$\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$ *trong đó* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *lấy các giá trị bằng +1 hoặc -1 bởi vì:*

$$2\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$

$=\left[\pm 90^\circ\pm\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ\right]$ *trong đó dấu "+" tương ứng với a=1 và dấu " – " ứmg với a= -1*

Và

$$\cos\left[\pm 90^\circ\pm\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ\right]$$

$$=-\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$

Áp dụng công thức $2\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{2-2\cos}$ *, ta có:*

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$

$$=\pm\sqrt{2+2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ}$$

Để ý rằng tất cả các góc được xét đều nhỏ hơn 90° *về mặt giá trị tuyệt đối (ngay cả* $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)45^\circ=90^\circ-\frac{1}{2^n}90^\circ<90^\circ$ *và vì dấu của các góc này được định bởi dấu của* a_1 *, nên căn bậc hai trong công thức cuối phải lấy dấu "+" hoặc" – " tùy theo dấu của* a_1 *. Nói cách khác ta có thể viết:*

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$
$$=a_1\sqrt{2+2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ}$$

Giờ ta hãy dùng công thức hiển nhiên $2\sin a_1 45^\circ = a_1\sqrt{2}$ *giúp ta suy ra liên tiếp các hệ thức sau:*

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}\right)45^\circ = a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2}}$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}\right)45^\circ = a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2}}}$$

………………………………………………

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{2^2}+....+\frac{a_1a_2a_3...a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$
$$=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+...+a_n\sqrt{2}}}}$$

Bài 5: *Tìm điều kiện đối với a và b để hàm số :*

$y=2x+a\sin x+b\cos x$ *luôn đồng biến*

Giải:

Hàm số có tập xác định $D=R$

Có đạo hàm $y'=2+a\cos x-b\sin x$

Trường hợp 1: $a=b=0\Rightarrow y'=2>0 \quad \forall x\in R$

Điều này thỏa mãn yêu cầu đề bài

Trường hợp 2: $a^2+b^2>0$

Ta có: $y'=2+\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

Với $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

$y'=2+\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$

vì $-1\le\cos(x+\varphi)\le 1$ *nên* $\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\le 2+\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)\le 2+\sqrt{a^2+b^2}$

Để hàm số luôn đồng biến:

$\Leftrightarrow y'\ge 0 \quad \forall x\in R$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\le 2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4$

Kết luận $a^2+b^2\le 4$

(chú ý $a^2+b^2\le 4$ *vẫn đúng khi* $a=b=0$*)*

Bài 6:

Cho hàm số $y = 4x^3 - mx$. *Tính m để* $|y| \le 1$ *khi* $|x| \le 1$

Giải:

Thuận: vì $|x| \le 1$ *nên ta chọn:*

* $x = 1 \Rightarrow y = 4 - m$

Theo giả thiết $|y| \le 1 \Rightarrow |4 - m| \le 1$

$\Rightarrow -1 \le 4 - m \le 1$

$\Rightarrow 3 \le m \le 5$ *(1)*

Theo giả thiết $|y| \le 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1-m}{2}\right| \le 1$

$\Rightarrow |1 - m| \le 2$

$\Rightarrow -2 \le 1 - m \le 2$

$\Rightarrow -1 \le m \le 3$

Kết hợp (1) và (2) suy ra m=3

Đảo: với m=3 $\Rightarrow y = 4x^3 - 3x$

Theo giả thiết $|x| \le 1$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in R : x = \cos\alpha$

Vậy $y = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\Leftrightarrow y = \cos 3\alpha$

$\Leftrightarrow |y| = |\cos 3\alpha| \le 1$

Kết luận m=3

Bài 7: *Chứng minh rằng nếu* $m\sin(a+) = \cos(a = b)$ *trong đo* $a - b \ne k\pi$ *và* $m \ne 1$ *thì biểu thức*

$$E = \frac{1}{1 - m\sin 2a} + \frac{1}{1 - m\sin 2b}$$ *không phụ thuộc vào a và b*

Giải:

Ta có: $\sin 2a = \sin[(a+b) + (a-b)]$

$= \sin(a+b)\cos(a-b) + \cos(a+b)\sin(a-b)$

$= m\sin^2(a+b) + \cos(a+b)\sin(a-b)$

$\Rightarrow 1 - m\sin 2a = 1 - m^2\sin^2(a+b) - m\cos(a+b)\sin(a-b)$

$= 1 - \cos^2(a-b) - m\cos(a+b)\sin(a-b)$

$= \sin^2(a-b) - m\cos(a+b)\sin(a-b)$

$= \sin(a-b)[\sin(a-b) - m\cos(a+b)]$

Tương tự $1 - m\sin 2b = \sin(a-b)[\sin(a-b) + m\cos(a+b)]$

$$E = \frac{1}{\sin(a-b)[\sin(a-b) - m\cos(a+b)]} + \frac{1}{\sin(a-b)[\sin(a-b) + mco(a+b)]}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{1}{\sin(a-b) - m\cos(a+b)} + \frac{1}{\sin(a-b) + m\cos(a+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\frac{2\sin(a-b)}{\sin^2(a-b)-m^2\cos^2(a+b)}$$
$$=\frac{2}{\sin^2(a-b)-m^2[1-\sin^2(a+b)]}$$
$$=\frac{2}{\sin^2(a-b)+m^2\sin^2(a+b)-m^2}$$
$$=\frac{2}{\sin^2(a-b)+\cos^2(a-b)-m^2}$$
$$=\frac{2}{1-m^2} \quad \text{(không phụ thuộc vào a và b)}$$

Bài 8: *Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:*

$$u_n=\tan n\tan(n-1), n=1,2...$$

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số α,β sao cho ta có

$$S_n=u_1+u_2+..u_n=\alpha\tan n+\beta n \qquad \forall n=1,2...$$

Giải :

Theo công thức cộng cung, ta có $\forall n=1,2...$

$$\tan 1=\frac{\tan k-\tan(k-1)}{1+\tan k\tan(k-1)} \Rightarrow \tan k\tan(k-1)=\frac{\tan k-\tan(k-1)}{\tan 1}$$

Từ đó suy ra :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\tan k\tan(k-1)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\tan k-\tan(k-1)}{\tan 1}-1\right]$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\tan k-\tan(k-1)}{\tan 1}\right)-n=\frac{\tan n}{\tan 1}-n$$

Đặt $\alpha=\dfrac{1}{\tan 1}, \beta=-1$ khi đó $\forall n=1,2...$ ta có:

$$S_n=\alpha\tan n+\beta n$$

Vậy bài toán được chứng minh với sự tồn tại của các hằng số α,β như trên

Bài 9: *Dãy số xác định như sau:*

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=2x_n{}^2-1 \end{cases} \qquad n=0,1,2......$$

Biết $|a|<1$. Tìm điều kiện của a để các số hạng của dãy trên đôi một khác nhau.

Giải :

Vì $|a|<1$ nên ta có thể đặt $a=\cos\alpha$ với $0<\alpha<\pi$

Khi đó ta có:

$$x_0=\cos\alpha$$
$$x_1=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$$
$$x_2=2\cos^2 2\alpha-1=\cos 4\alpha=\cos 2^2\alpha$$

Bằng qui nạp dễ thấy $x_n=\cos 2^n\alpha$

Giả sử ta có $n < m$ *mà* $x_n = x_m$ *tức là* $\cos 2^n \alpha = \cos 2^m \alpha$

$\Rightarrow 2^n \alpha = \pm 2^m \alpha + 2k\pi, k \in z$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{2k}{2^n \mp 2^m}$ *Là số hữu tỉ*

Đảo lại giả sử $\dfrac{\alpha}{\pi}$ *là số hữu tỉ, tức là* $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{p}{q}$

Trong đó p,q nguyên dương và nguyên tố cùng nhau.

Khi đó ta có: $2^k \alpha = 2^k \dfrac{p\pi}{q} = (2q\alpha_k + \beta_k)\dfrac{\pi}{q} = 2\alpha_k \pi + \beta_k \dfrac{\pi}{q}$

Trong đó β_k *nhận một trong các giá trị 0,1,2....2q-1 và* $\alpha_k \in N$

Vì $x_k = \cos 2^k \alpha$ *suy ra mỗi một số* x_k *trong dãy vô hạn* $\{x_k, k = 0,1,2...\}$ *sẽ bằng 1 phần tử trong dãy hữu hạn* $\left\{\cos\dfrac{l\pi}{q}\right\}$ *với l=1,2...2q-1*

Điều đó có nghĩa tồn tại n<m sao cho $x_n = x_m$

Vậy khi $|a| < 1$*, để mọi số hạng của dãy đôi một khác nhau , điều kiện cần và đủ là* $\dfrac{\alpha}{\pi}$ *là số vô tỉ với cosα=a*

Bài 10: *Cho* $\triangle ABC$ *có* $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$ *.Chứng minh rằng :*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{4}{5}$$

Giải :

Trước hết ta chứng minh đẳng thức sau:

$\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2} (1)$

Thật vậy, nhân cả 2 vế cho $\sin\dfrac{2\pi}{7}$*, ta được*

$$\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$VT = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

Nhưng $\dfrac{4\pi}{7} = \pi - \dfrac{3\pi}{7}$*, nên* $\sin\dfrac{4\pi}{7} = \sin\dfrac{3\pi}{7}$

Vậy

$$VT = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} = VP \Rightarrow dpcm$$

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \\ 4\hat{A}=2\hat{B}=\hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow A=\frac{\pi}{7}; B=\frac{2\pi}{7}; C=\frac{4\pi}{7}$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{4}{5}(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}=\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}(1)$$

(1) đúng $\Rightarrow$ 2 đúng

<u>Bài 11:</u> *Cho dãy số xác định như sau:*

$$\begin{cases} U_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ U_{n+1}=\frac{U_1+2-\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}-2\right)U_n}; n=2,3..... \end{cases}$$

Tìm u_{2008}

<u>Giải :</u>

Ta có: $\tan\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$

Viết lại biểu thức của U_{n+1} dưới dạng sau:

$$U_{n+1}=\frac{U_n+\tan\frac{\pi}{12}}{1-U_n\tan\frac{\pi}{12}}(1)$$

Đặt $U_n=\tan\beta$ thì từ (1) suy ra

$$U_{n+1}=\tan\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)(2)$$

Vì $U_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *nên từ (2) và nguyên lý quy nạp ta dễ dàng suy ra:*

$$U_n=\tan\left(\frac{\pi}{6}+(n-1)\frac{\pi}{12}\right)$$

Vậy: $U_{2008} = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2007\pi}{12}\right)$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6} + 167\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

<u> Chú ý:</u> Bằng cách giải hoàn toàn tương tự, ta làm được bài toán sau:*

Cho $U_1 = \sqrt{2}$ *và* $U_{n+1} = \frac{U_n + \sqrt{2} - 1}{\left(\sqrt{2}-1\right)U_n + 1}$. *Tìm* U_{2008}

Do $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. *Nên ta suy ra*

$U_n = \tan\left(\alpha + (n-1)\frac{\pi}{8}\right)$ *với* $\alpha = \arctan\sqrt{2}$

$\Rightarrow U_{2008} = \tan\alpha = \sqrt{2}$

CHƯƠNG II:

ỨNG DỤNG CỦA LƯỢNG GIÁC TRONG HÌNH HỌC

Lượng giác là một công cụ mạnh trong toán học, nó được ứng dụng trong giải các dạng toán khác, điển hình như hình học, khảo sát hàm số, chứng minh bất đẳng thức.....Các bài tập ở chương này chủ yếu nêu ra những ví dụ về sử dụng công cụ lượng giác để chứng minh những bài tập khó và giới thiệu cho các bạn một số bài toán đặc biệt.

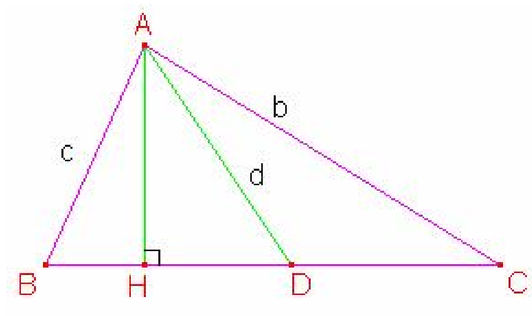
Bài 1:(Định lý Stewart)

Cho Δ ABC D là 1 điểm trên cạnh BC. Đặt AD = d, BD = m, DC = n. Khi đó ta có công thức sau: (gọi là hệ thức Stewart): $ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn$

Giải:

Kẻ đường cao AH xét 2 tam giác ABD và ACD và theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\widehat{ADB}$$
$$= d^2 + m^2 - 2mHD \ (1)$$
$$b^2 = d^2 + n^2 - 2nd\cos\left(\pi - \widehat{ADB}\right)$$
$$= d^2 + n^2 + 2nd\cos\widehat{ADB}$$
$$= d^2 + n^2 + 2nHD \ (2)$$



Nhân từng vế (1) và (2) theo thứ tự với n và m rồi cộng lại, ta có:

$$nc^2 + mb^2 = d^2(m+n) + mn(m+n) \ (3)$$

Do $m + n = a$ *nên từ (3) suy ra:*

$$ad^2 = mb^2 + nc^2 - amn$$

$\Longrightarrow$ *Định lý Stewart chứng minh xong .*

** Mở rộng:*

1. Stewart*(1717-1785) là nhà toán học và thiên văn học người Scotland.*

2. *Nếu trong hệ thức Stewart xét AD là đường trung tuyến thì từ hệ thức Stewart có:*

$$am_a^2 = \frac{a}{2}b^2 + \frac{a}{2}c^2 - a\frac{a}{2}\frac{a}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \ (4)$$

(4) chính là hệ thức xác định trung tuyến quen biết trong tam giác

3. *Nếu trong hệ thức Stewart xét AD là phân giác. Khi đó theo tính chất đường phân giác trong ta có:*

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \Leftrightarrow m = \frac{ac}{b+c} \text{ và } n = \frac{ab}{b+c}$$

Từ hệ thức Stewart có:

$$al_a^2 = \frac{ac}{b+c}b^2 + \frac{ab}{b+c}c^2 - a\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow\ l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}\ (5)$$

Chú ý rằng:

$$2cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\ (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$l_a^2 = \frac{b^2c^2cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}\ \Rightarrow l_a = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

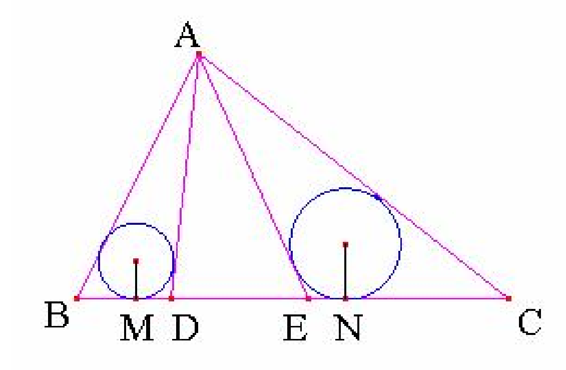
(7) chính là hệ thức xác định đường phân giác l_a.

Vậy, hệ thức Stewart là tổng quát hóa của hệ thức xác định đường trung tuyến và đường phân giác đã quen biết.

Bài 2:Cho ΔABC giả sử D và E là 2 điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Đường tròn nội tiếp các Δ ABD và Δ ACE tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại M và N.Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}$$

Giải:



Ta có:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{MB + MD}{MB.MD} = \frac{BD}{MB.MD}$$

$$\frac{1}{NC} + \frac{1}{NE} = \frac{NC + NE}{NC.NE} = \frac{EC}{NC.NE}$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức sau:

$BD.NC.NE = EC.MB.MD$ *(*)*

Đặt $\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = \propto$

Áp dụng định lý hàm số sin trong các ΔABD và ΔACE, ta có:

$$\frac{BD}{\sin\propto} = \frac{AD}{\sin B}\ (1)\ ;\ \frac{EC}{\sin\propto} = \frac{AE}{\sin C}\ (2)$$

Trong ΔABE theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{AE}{\sin B} = \frac{BE}{\sin\overline{BAE}} \Rightarrow\ AE = \frac{BE\sin B}{\sin\overline{BAE}}\ (3)$$

Tương tự:

$$AD = \frac{CD \sin C}{\sin \widehat{DAC}} \quad (4)$$

Thay (3) vào (1) có:

$$\frac{BD}{\sin \propto} = \frac{CD \sin C}{\sin \widehat{DAC} \sin B} \quad (5)$$

Thay (4) vào (2) có:

$$\frac{EC}{\sin \propto} = \frac{BE \sin B}{\sin \widehat{BAE} \sin C} \quad (6)$$

Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ *nên từ (5) và (6) suy ra:*

$$\frac{BD}{EC} = \frac{CD}{BE}\left(\frac{\sin C}{\sin B}\right)^2 \ hay$$

$$\frac{BD.BE}{CD.CE} = \frac{c^2}{b^2} \ (7)$$

Trong ∆ABD ta có:

$$MB = \frac{AB + AD - BD}{2} - AD = \frac{c + BD - AD}{2}$$

Tương tự:

$$MD = \frac{BD + AD - c}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 2MB + AD = c + BD \\ 2MD + AD = -c + BD \end{cases} (8)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\mathrm{BD}\sin B}{AD} = \frac{CE \sin C}{AE} \quad (= \sin \propto)$$

$$\Rightarrow \frac{BD.b}{AD} = \frac{CE.c}{AE}$$

$$\Rightarrow b.BD.AE = C.CE.AD \quad (9)$$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong các tam gicas ABD và ACE ta có:

$$BD^2 = AD^2 + c^2 - 2ADccos \propto$$

$$CE^2 = AE^2 + b^2 - 2AEbcos \propto$$

$$\Rightarrow \frac{c^2 + AD^2 - BD^2}{AD.c} = \frac{b^2 + AE^2 - CE^2}{AE.b} \quad (10)$$

Ta có: $BD^2 - c^2 = (BD + c)(BD - c)$ *và theo (8) có*

$$BD^2 - c^2 = (2MB + AD)(2MD + AD) = 4MB.MD + 2AD.BD + AD^2 \quad (11)$$

Tương tự ta có:

$CE^2 - b^2 = 4NC.NE + 2AE.CE + AE^2$ *(12)*

Thay(11),(12) vào (1) có:

$$\frac{2MB.MD + AD.BD}{c.AD} = \frac{2NC.NE + AE.CE}{b.AE}$$

$\rightarrow\ b.AE(2MB.MD + AD.BD) = c.AD(2NC.NE + AE.CE)$ *(13)*

Từ (9)và (13) có $b.AE.MB.MD = c.AD.NC.NE$ *(14)*

Từ(3) (4) và (14) suy ra

$$b.MB.MD.\frac{BE\sin B}{\sin \overline{BAE}} = c.NC.NE.\frac{CD\sin C}{\sin \overline{DAC}}$$

Hay sau khi thay

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

Ta có :

$$\frac{b.MB.MD.BE}{c} = \frac{c.NC.NE.CD}{b}$$

$\rightarrow\ MB.MD.BE = \frac{c^2}{b^2}NC.NE.CD$ *(15)*

Thay(7) vào (15) có:

$$MB.MD.BE = \frac{BD.BE}{CD.CE}NC.NE.CD$$

Hay $MB.MD.BE = NC.NE.CD$ *(*)*

Vậy (*) đúng và là điều cần chứng minh.

<u>Bài 3 :</u> (Định lí hàm số cos thứ nhất với tứ giác)

Cho tứ giác lồi ABCD, trong đó $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, \widehat{ABC} = \beta, \widehat{BCD} = \gamma$ *AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng :*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\beta - 2bc\cos\gamma - 2ac\cos(\beta+\gamma)$$

<u>Giải :</u>

Gọi K, L tương ứng là trung điểm AC và BD và M là trung điểm BC (Chỉ xét khi K ≠ L, tức là khi ABCD không phải là hình bình hành, vì nếu ABCD là hình bình hành thì $\beta+\gamma = 180^0; a = c, b = d$ *và kết luận trên là điều hiển nhiên)*

Có 2 khả năng xảy ra :

1) Nếu AB không song song với CD

Giả sử $AB \cap CD = E \Rightarrow \widehat{KML} = \widehat{AED}$

Với trường hợp AB cắt CD về phía trên, ta có : $\widehat{AED} = 180^0 - \left[\left(180^0 - \beta\right) + \left(180^0 - \gamma\right)\right] = \beta + \gamma - 180^0$

Khi AB cắt CB về phía dưới, ta có: $\widehat{AED} = 180^0 - (\beta+\gamma)$

Trong cả hai trường hợp đều có : $\cos AED = -\cos(\beta+\gamma)$

Trong ΔMKL, theo định lí hàm số sin, ta có:

$$KL^2 = MK^2 + Ml^2 - 2ML.MK\cos KML$$

$$KL^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + 2\frac{a}{2}\frac{c}{2}\cos(\beta+\gamma)$$

$$\Rightarrow KL^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{ac}{2}\cos(\beta+\gamma)(1)$$

Theo công thức Euler với tứ giác, ta có :

$$KL^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\right)(2)$$

Với $e = AC, f = BD$, thay (2) vào (1) :

$$a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2 = a^2+b^2+2ac\cos(\beta+\gamma)(3)$$

Lại áp dụng định lí hàm số cos, ta có :

$$e^2 = a^2+b^2-2ab\cos\beta(4)$$

$$f^2 = c^2+b^2-2bc\cos\gamma(5)$$

Thay (4) và (5) vào (3), ta có :

$$d^2 = e^2+f^2-b^2+2ac\cos(\beta+\gamma)$$

$$= a^2+b^2+c^2-2ab\cos\beta-2bc\cos\gamma+2ac\cos(\beta+\gamma)$$

2) Nếu AB//CD

Khi đó $\beta+\gamma = 180^0$

Vậy đẳng thức tương đương với :

$$d^2 = a^2+b^2+c^2-2\cos\beta(ab-bc)-2ac$$

$$\Leftrightarrow d^2 = a^2+b^2+c^2-2b\cos\beta(a-c)-2ac(6)$$

Thật vậy, kẻ AE//BC, theo định lí hàm số cos trong ΔAED ta có :

$$d^2 = b^2+(c-a)^2-2b(c-a)\cos\gamma$$

$$= b^2+c^2+a^2-2b(c-a)\cos\beta-2ac$$

Vậy (6) đúng. Đó chính là đpcm.

** Chú ý :*

***1.** Nhắc lại công thức Euler sau đây:*

Cho tứ giác lồi ABCD, trong đó $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$. Gọi K và L là trung điểm AC và BD. Khi đó ta có :

$$KL^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\right)$$

Chứng minh công thức Euler như sau:

Xét tam giác ALC, theo tính chất trung tuyến :

$$KL^2 = \frac{2LC^2+2LA^2-AC^2}{4}$$

$$= \frac{2.\frac{2BC^2+2CD^2-BD^2}{4}+2.\frac{2AB^2+2AD^2-BD^2}{4}-AC^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\right)$$

Đó là đpcm.

***2.** Ta có cách giải khác cho bài toán trên như sau:*

Hiển nhiên có :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$<=> AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

Theo định nghĩa của tích vô hướng suy ra :

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\beta - 2bc\cos\gamma + 2ac\cos(AB, CD)$

Do $\cos(AB, CD) = \cos(\beta + \gamma)$

(Chú ý là $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos\left(180^0 - \beta\right) = -\cos\beta, \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) = \cos\left(180^0 - \gamma\right) = -\cos\gamma.$

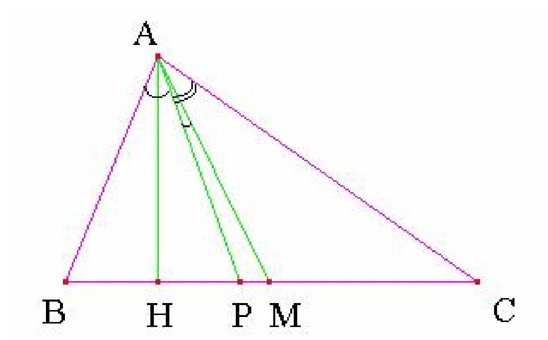
=> đpcm

***<u>Bài 4:</u>** Cho tam giác ABC có* $\widehat{B} > \widehat{C}$*, gọi AH, AP, AM tương ứng là đường cao, đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ A. Đặt* $\widehat{MAP} = \alpha$*. Chứng minh rằng :*

$\tan^2\frac{A}{2} = \tan\alpha.\cot\frac{B-C}{2}$

<u>Giải:</u>

<u>Cách 1:</u>



$MB = MC$

$=> S_{ABM} = S_{ACM}$

$=> \frac{1}{2}c.AM\sin MAB = \frac{1}{2}b.AM\sin MAC$

$=> c.\sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right) = b.\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)(1)$

Theo định lí hàm số sin, từ (1) ta có:

$\sin C\sin\left(\frac{A}{2} + \alpha\right) = \sin B\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)$

$=> \sin C\sin\frac{A}{2}\cos\alpha + \sin C\cos\frac{A}{2}\sin\alpha = \sin B\sin\frac{A}{2}\cos\alpha - \sin B\cos\frac{A}{2}\sin\alpha$

$=> \cos\frac{A}{2}\sin\alpha(\sin B + \sin c) = \sin\frac{A}{2}\cos\alpha(\sin B - \sin C)$

$=> 2\cos\frac{A}{2}\sin\alpha\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\alpha\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

$=> \sin\alpha\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \cos\alpha\sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}(2)$

Chia cả 2 vế của (2) cho $\cos^2\frac{A}{2}\cos\alpha\sin\frac{B-C}{2}$ *ta có :*

$\tan^2\frac{A}{2} = \tan\alpha.\cot\frac{B-C}{2}$

Đó là đpcm.

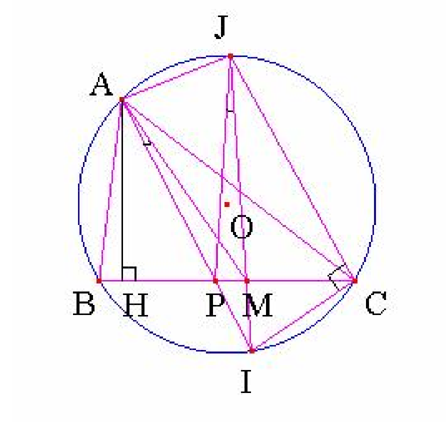
<u>Cách 2:</u>

Đường phân giác trong AP kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại I. Kéo dài OI cắt đường tròn tại J.

Dễ dàng thấy rằng PATM là tứ giác nội tiếp.

=> $\widehat{PJM} = \widehat{PAM} = \alpha$

Mặt khác $\widehat{PIM} = \dfrac{B-C}{2}$



Từ đó suy ra : $\tan\alpha\cot\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{PM}{JM}.\dfrac{MI}{PM} = \dfrac{MI.IJ}{MJ.IJ}(1)$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\begin{cases} MI.IJ = IC^2 \\ MJ.IJ = IJ^2 \end{cases}$$

Vậy thay vào (1) ta được:

$$\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2} = \left(\frac{IC}{JC}\right)^2 = \tan^2 IJC = \tan^2\alpha$$

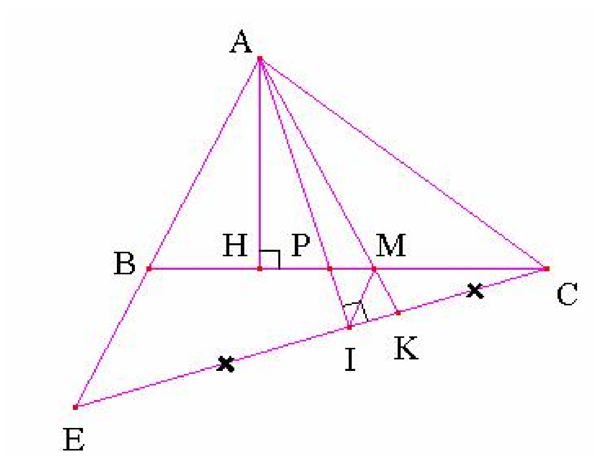
Đó là đpcm.

<u>Cách 3:</u>

Đẳng thức $\tan^2\dfrac{A}{2} = \tan\alpha.\cot\dfrac{B-C}{2}$

$$<=> \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2} = \tan\alpha\tan\frac{B-C}{2}$$

$$<=> \frac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}(1)$$



Theo định lí hàm số tan, ta có

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

Vậy từ (1) suy ra:

$$\tan^2\alpha = \tan\alpha\cot\frac{B-C}{2}$$

$$<=> \frac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{b+c}(2)$$

Kéo dài Ab một đoạn BE=b-c. AP kéo dài cắt EC tại K

=> $AI \perp EC$ và $IE = IC$

Ta có:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{\frac{IK}{AI}}{\frac{EI}{AI}} = \frac{IK}{EI}(3)$$

Dễ thấy MI // BE (Đường trung bình trong ΔBEC)

=> *Theo định lí Thales ta có :*

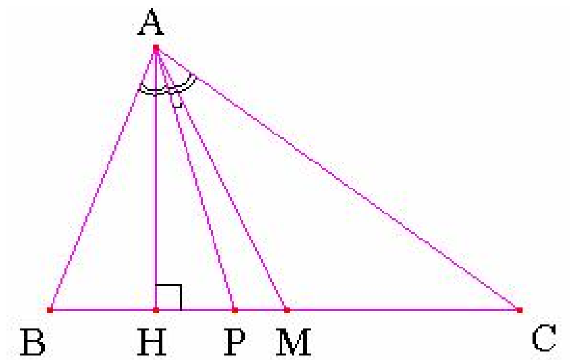
$$\frac{IK}{EK}=\frac{MI}{AE}\Rightarrow\frac{IK}{EK-IK}=\frac{MI}{AE-MI}\Rightarrow\frac{IK}{EK}=\frac{\frac{b-c}{2}}{b-\frac{b-c}{2}}=\frac{b-c}{b+c}(4)$$

Thay (4) vào (3) ta có: $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{b-c}{b+c}$. *Vậy (2) đúng => đpcm.*

<u>Cách 4:</u>

$$\widehat{APB}=\widehat{C}+\widehat{MAC}=\widehat{C}+\frac{\widehat{A}}{2}$$

$$=\widehat{C}+\frac{180^0-\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=90^0-\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\Rightarrow\widehat{HAD}=\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$$



Mặt khác :

$$\tan\alpha=\tan\left(\widehat{HAM}-\widehat{HAD}\right)$$

$$=\tan\left(\widehat{HAM}-\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)$$

$$=\frac{\tan\widehat{HAM}-\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}{1+\tan\widehat{HAM}\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}$$

Ta có : $\tan HAM=\dfrac{HM}{AH}=\dfrac{HC-HB}{2AH}=\dfrac{1}{2}(\cot C-\cot B)=\dfrac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}(2)$

Thay (2)vào (1), ta có đpcm

$$\tan\alpha=\frac{\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}-\tan\frac{B-C}{2}}{1+\frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}\tan\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin B\sin C\sin\frac{B-C}{2}}{\left(\sin B\sin C+\sin^2\frac{B-C}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}\left[1+\cos(B-C)-\cos(B-C)+\cos(B+C)\right]}{\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)+1-\cos(B-C)\right]\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\tan\frac{B-C}{2}.\frac{2\cos^2\frac{B+C}{2}}{2\sin^2\frac{B+C}{2}}=\tan\frac{B-C}{2}\cot^2\frac{B+C}{2}$$

$$=\tan\frac{B-C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\Rightarrow\tan^2\frac{A}{2}=\tan\alpha\cot\frac{B-C}{2}$$

Cách 5 :

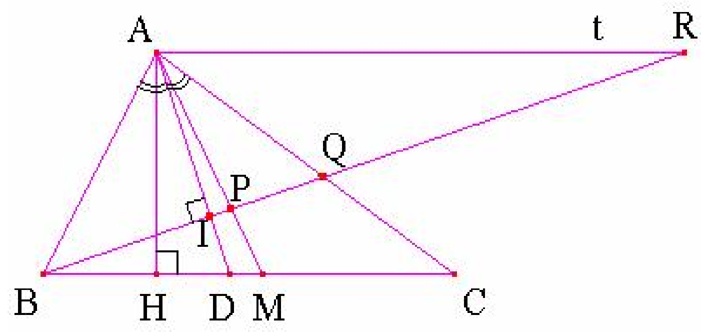
Kẻ At // BC. Từ B dựng đường vuông góc với phân giác AD. Đường này lần lượt cắt AD, AM, AC, At tại I, P, Q, R. Dễ thấy rằng B, P, Q, R là một hàng điểm điều hoà. Rõ ràng I là trung điểm PQ, vậy theo hệ thức Newton với hàng điểm điều hoà, ta có:

$IB^2 = IP.IR$

$=> \left(\frac{IB}{IA}\right)^2 = \frac{IP}{IA}.\frac{IR}{IA}$

$<=> \tan^2\frac{A}{2} = \tan\alpha\cot IRA$

$\widehat{IRA} = \widehat{IBD}, \widehat{IBD} = \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}(2)$



(so le trong)

Thay (2)vào (1) ta có đpcm.

** <u>Chú ý :</u> Với bài tập trên chúng em đưa ra 5 cách chứng minh khác nhau. Nói chung, một bài toán có nhiều cách giải và 5 chưa phải là một con số đủ lớn để người ta dừng việc tìm tòi. Nào, thử khám phá một con đường đọc đáo khác xem, cách giải thứ 6 đang đợi những nhà toán học tài năng nhất đấy!*

Bài 5:

Cho tam giác ABC. Gọi I vs O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Kí hiệu d_e= IO.

1. Chứng minh công thức Euler sau đây :

$d_e{}^2 = R^2 - 2rR$

2. Giả sử ta có $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$*, chứng minh rằng OI = r.*

Giải :

1. Ta có $\mathrm{P}_I(O) = R^2 - OI^2 = IA.IA'(1)$*, với A' là giao điểm của AI với đường tròn.*

Ta có :

$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

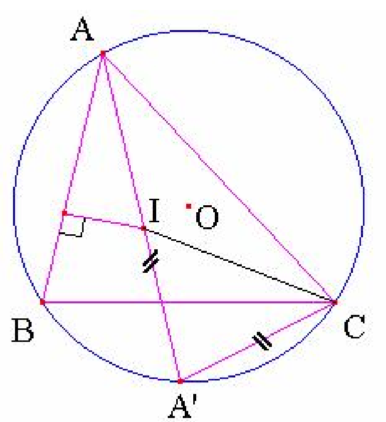
$A'IC = IAC + ICA = \frac{A+C}{2}$

$ICA' = \frac{A+C}{2}$

=> $\Delta IA'C$ *cân đỉnh A nên IA' = A'C*

Áp dụng định lí hàm số sin trong $\Delta AA'C$*,*

ta được: $A'C = 2R\sin\frac{A}{2}$



Vậy từ (1), ta có : $R^2 - d_e{}^2 = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.2R\sin\frac{A}{2} => d_e{}^2 = R^2 - 2Rr$

Công thức Euler được chứng minh.

2. Áp dụng công thức $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ *và theo giả thiết suy ra :*

$$\frac{r}{4R} = \frac{\sqrt{2}-1}{4} => r + R = R\sqrt{2}$$

$$=> r^2 + 2Rr + R^2 = 2R^2$$

$$=> r^2 = R^2 - 2Rr$$

Theo công thức Euler ở phần 1, ta được $r^2 = d_e^{\ 2}$

hay IO = r (đpcm)

Bài 6 : *Cho tam giác ABC với* $\widehat{B} > \widehat{C}$. *Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp,* O_1 *là tâm đường tròn bàng tiếp góc A tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\tan OO'O_1 = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}$$

Giải:

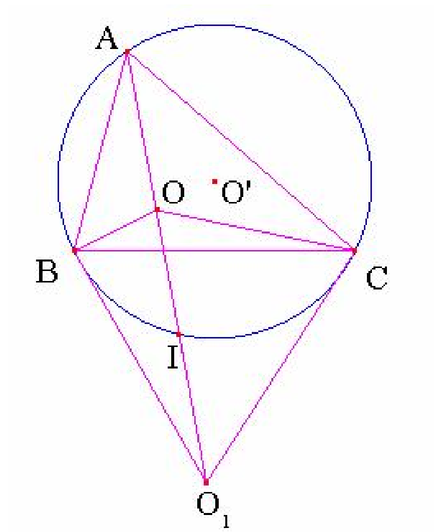
Rõ ràng $OBI_1 = \mathrm{OCO}_1 = 90^0$ => *$BOCO_1$ là tứ giác nội tiếp.*

Gọi I là trung điểm OO_1

$$=> \widehat{BIC} = 2\widehat{BO_1C} = \widehat{B} + \widehat{C}$$

$$=> \widehat{A} + \widehat{BIC} = 180^0$$

=> *ABIC là tứ giác nội tiếp. Vậy I nằm trên đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *và I chính là giao điểm của* AO_1 *với đường tròn ấy.*



Dễ thấy $\overset{\frown}{BI} = \overset{\frown}{CI}$

Áp dụng định lí hàm số cot trong $\Delta OO'O_1$*, ta có :*

$$\cot OO'O_1 = \frac{O'O^2 + O'O_1^{\ 2} - O_1O^2}{4S_{OO'O_1}} (*)$$

$$S_{OO'O_1} = 2S_{OO'I} = 2.\frac{1}{2}OI.IO'\sin OIO'$$

$$= \frac{1}{2}OO_1.IO'\sin OIO'$$

$$(OI = O_1I)$$

Vì $OIO' = \frac{B-C}{2} => S_{OO'O_1} = \frac{1}{2}R.OO_1\sin\frac{B-C}{2}(1)$

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔBOC*, ta có :*

(với chú ý là đường tròn ngoại tiếp ΔBOC *chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác* $BOCO_1$ *có đường kính* OO_1*)*

$$BC = OO_1\sin BOC = OO_1\sin\frac{B+C}{2} = OO_1\cos\frac{A}{2}$$

Mặt khác theo định lí hàm số sin trong ΔABC *ta có :*

$$BC = 2R\sin A$$

$$=> 2R\sin A = OO_1\cos\frac{A}{2} => OO_1 = 4R\sin\frac{A}{2}(2)$$

Thay (2) vào (1) có: $S_{OO'O_1} = 2R^2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}(3)$

Lại có :

$$O'O^2 + O'O_1^2 - OO_1^2 = 2O'I^2 + 2OI^2 - OO_1^2$$

$$= 2R^2 - 8R^2\sin^2\frac{A}{2} = 2R^2(2\cos A - 1)(4)$$

Thay (4) vào (3) ta được

$$\cot O'OO_1 = \frac{2\cos A - 1}{4\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{2\cos A - 1}{2(\sin B - \sin C)}$$

$$=> \tan O'OO_1 = \frac{2(\sin B - \sin c)}{2\cos A - 1}$$

Đó là đpcm.

<u>Bài 7:</u> (Định lí Steiner - Lemus về tam giác cân)

Cho ΔABC *có* $\ell_b = \ell_c$. *Chứng minh rằng ABC là tam giác cân đỉnh A.*

<u>Giải:</u>

Ta có

$$\ell_b = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

$$\ell_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\ell_b = \ell_c <=> \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$<=> \frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(1)$$

Giả thiết phản chứng $b \neq c$, *không mất tính tổng quát, giả sử b > c*

$$b > c => 90^0 > \frac{B}{2} > \frac{C}{2} > 0 => \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2}$$

$$=> \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} > \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$b > c => \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$$

Vậy VP(1) > VT(1). Điều này vô lí, chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai, nên b = c.

Do đó ABC là tam giác cân đỉnh A (đpcm).

<u> Chú ý:</u>*

1. Jacob Steiner *(1796 - 1863) là nhà hình học nổi tiếng người Thuỵ Sĩ. Định lí Steiner này có hàng chục cách chứng minh khác nhau, trong đó cách chứng minh trên là cách duy nhất sử dụng các kiến thức lượng giác.*

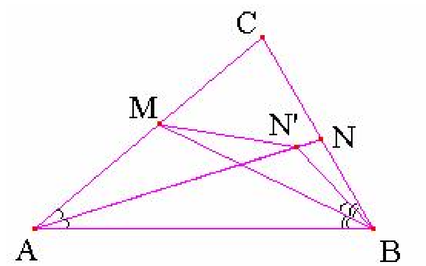
__2.__ Sau đây chúng em xin đưa ra hai cách chứng minh "phi lượng giác" đẹp mắt để bạn đọc thưởng thức.

***<u>Cách 1:</u>** (Tác giả là 2 kĩ sư người Anh G.Jylbert và D.Mac - Donnell, được công bố trên tạp chí "American Mathematical Monthly" vào năm 1963 và được coi là cách giải đơn giản nhất tại thời điểm này.)*

<u>Bổ đề :</u> Trong tam giác ABC, nếu $\widehat{A} < \widehat{B}$ thì đường phân giác AN lớn hơn đường phân giác BM.

Chứng minh bổ đề:

Lấy N' trên AN sao cho $\widehat{MBN'} = \frac{\widehat{A}}{2}$



Từ đó suy ra tứ giác ABN'M nội tiếp (vì $\widehat{MBN'} = \widehat{MAN'}$)

Trong đường tròn này

$\widehat{MAB} < \widehat{N'BA} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} < \overset{\frown}{N'A}$

$\Rightarrow BM < N'A$

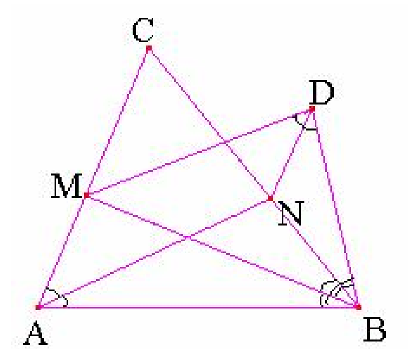
Mà $N'A < AN \Rightarrow BM < AN$

Bổ đề được chứng minh.

Định lí Steiner - Lenmus là hệ quả trực tiếp của bổ đề trên.

***<u>Cách 2:</u>** (Của tác giả R.W.Hegy đăng trên tạp chí "The Mathematical Gazette" của Anh vào năm 1992. Được xem là cách giải đơn giản nhất)*

Vẽ hbh AMDN như hình vẽ với các kí hiệu góc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$



Do AN = BM => ΔMBD cân ở M => $\alpha + \gamma = \beta + \delta (1)$

Nếu $\alpha < \beta$, từ (1) suy ra $\gamma < \delta (2)$

Mặt khác xét hai tam giác NAB và MAB có AB chung, BM = AN

Mà $\alpha < \beta$ nên BN > AM => BN > DN (3)

Vì vậy trong ΔBDN từ (3) suy ra $\delta < \gamma (4)$

(2) và (4) mâu thuẫn => Vô lí

Vì lí do tương tự , α không thể bé hơn β

$\Rightarrow \alpha = \beta$ *(đpcm)*

Các bạn độc giả thân mến! Kể từ năm 1840 khi S.L.Lenmus gửi thư cho nhà hình học J.Steiner đến nay đã 170 năm. Từ cách chứng minh của Steiner cho đến cách chứng minh gần đây nhất của R.W.Hegy, con người đã dần thực hiện được khát vọng vươn đến cái đơn giản nhất. Chắc rằng quá trình này chưa dừng lại ở đây!

__3.__ Cuối phần chú ý này xin giành cho cách giải của chính J.Steiner

Dựa vào công thức:

$$\begin{cases} \ell_b^2 = \dfrac{ac\left[(a+c)^2 - b^2\right]}{(a+c)^2} \\ \ell_c^2 = \dfrac{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{(a+b)^2} \end{cases}$$

Từ $\ell_b = \ell_c$ sau khi biến đổi, đưa được về dạng :

$a\left(a+b+c\right)\left[\left(a+b+c\right)\left(a^2+bc\right)+2abc\right]\left(b-c\right)=0$

=> $b=c$

=> *ABC là tam giác cân đỉnh A*

***Bài 8 :** (Điểm và góc Broca)*

Cho tam giác ABC. M là 1 điểm trong tam giác sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{MBC}=\widehat{MCA}=\alpha$. *Chứng minh rằng :*

1. $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

2. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}$

3. $\sin^3\alpha=\sin\left(A-\alpha\right)\sin\left(B-\alpha\right)\sin\left(C-\alpha\right)$

4. $MA.MB.MC=8R^3\sin^3\alpha$

5. Diện tích của các tam giác MAB, MBC, MAC tỉ lệ với $\dfrac{1}{a^2},\dfrac{1}{b^2},\dfrac{1}{c^2}$

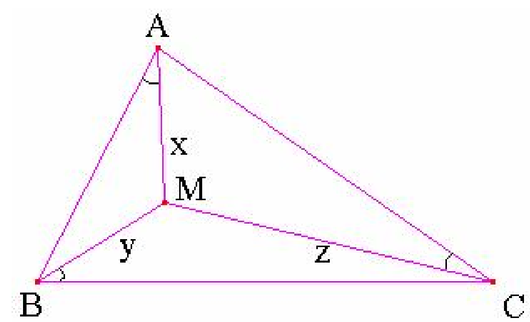
Giải :

1. Đặt MA = x, MB = y, MC = z

$S_{MAB}=S_1$, $S_{MBC}=S_2$, $S_{MCA}=S_3$

Như vậy $S=S_1+S_2+S_3$

Theo định lí hàm số cot trong các tam giác MAB, MBC, MCA ta có:



$$\cot\alpha=\frac{c^2+x^2-y^2}{4S_1}=\frac{a^2+y^2-z^2}{4S_2}=\frac{b^2+z^2-x^2}{4S_3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

$$\cot\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

<=> $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

(đpcm)

2. Từ câu 1 ta có:

$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

=> $\cot^2\alpha=\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)$

$=\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2$

<=> $\cot^2\alpha+1=\left(1+\cot^2 A\right)+\left(1+\cot^2 B\right)+\left(1+\cot^2 C\right)$

<=> $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}$ *(đpcm)*

3. Ta có $\widehat{MAB}=\widehat{MBC}=\widehat{MCA}=\alpha$

Rõ ràng $S_{MAC}=\dfrac{1}{2}MA.AC\sin\left(A-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}MC.AC\sin\alpha$

=> $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}$

Lý luận tương tự, ta có

$\dfrac{MC}{MB}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(C-\alpha)}$

$\dfrac{MB}{MA}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(B-\alpha)}$

Nhân từng vế ba đẳng thức trên, ta có :

$$1 = \frac{\sin^3\alpha}{\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)}$$

$$<=> \sin^3\alpha = \sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)$$

(đpcm)

4. Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính các đường trọn ngoại tiếp của các tâm giác MBC, MAC, MAB.

Theo định lí hàm số sin trong tam giác MBC, ta có :

$$BC = a = 2R_1 \sin BMC = 2R_1 \sin\left[\pi - (B_1 + C - C_1)\right]$$

$$B_1 = C_1 = \alpha => BC = a = 2R_1 \sin(\pi - C) = 2R_1 \sin C$$

Lí luận tương tự : $b = 2R_2 \sin A, c = 2R_3 \sin B$

$$=> abc = 8R_1R_2R_3 \sin A \sin B \sin C$$

$$=> R_1R_2R_3 = R^3 \, (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác MAB, ta có: $MB = 2R_3 \sin\alpha$

Tương tự

$$MC = 2R_1 \sin\alpha$$

$$MA = 2R_2 \sin\alpha$$

$$=> MA.MB.MC = 8R_1R_2R_3 \sin^3\alpha \, (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có $MA.MB.MC = 8R^3 \sin^3\alpha$ *(đpcm)*

5. Ta có $S_{MAC} = \frac{1}{2} MC.b \sin\alpha$

Theo câu 4 ta có :

$MC = 2R_1 \sin\alpha$ *và* $R_1 = \frac{a}{2\sin C} => S_{MAC} = \frac{ab\sin^2\alpha}{2\sin C}$

Lí luận tương tự :

$$S_{MAB} = \frac{bc\sin^2\alpha}{2\sin A}$$

$$S_{MBC} = \frac{ac\sin^2\alpha}{2\sin B}$$

$$=> S_{MAB} : S_{MBC} : S_{MCA} = \frac{bc}{\sin A} : \frac{ca}{\sin B} : \frac{ab}{\sin C}$$

$<=> S_{MAB} : S_{MBC} : S_{MCA} = \frac{bc}{a} : \frac{ac}{b} : \frac{ab}{c}$ *(Theo định lí hàm số sin)*

Chia 2 vế đẳng thức trên cho abc, ta có đpcm.

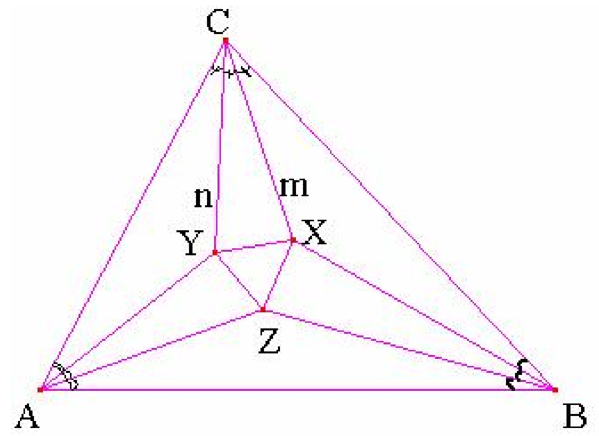
<u>Bài 9:</u> (Định lí Morley)

Cho tam giác ABC. Ở mỗi góc của tam giác ấy vẽ hai đường chia góc đó ra làm ba phần bằng nhau. Các đường ấy cắt nhau tại X, Y, Z. Chứng minh rằng XYZ là tam giác đều.

<u>Giải:</u>

Đặt $A=3\alpha, B=3\beta, C=3\gamma$. *Gọi các cạnh BC, CA, AB và đường kính đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *là a, b, c, d tương ứng. Theo định lí hàm số sin trong* ΔCYA *ta có :*

$$\frac{CY}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\left(180^0-\alpha-\beta\right)}(1)$$



Do $\alpha+\gamma=60^0$, *vậy từ (1) suy ra:*

$$CY=b.\frac{\sin\alpha}{\sin\left(120^0+\beta\right)}=d\sin 3\beta.\frac{\sin\alpha}{\sin\left(60^0-\beta\right)}(2)$$

Ta có :

$$\sin 3\beta=3\sin\beta-4\sin^3\beta=4\sin\beta\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2\beta\right]$$

$$=4\sin\beta\left[\sin^2 60^0-\sin^2\beta\right]$$

$$=4\sin\beta\sin\left(60^0+\beta\right)\sin\left(60^0-\beta\right)(3)$$

Thay (3) vào (2):

$$n=CY=4d\sin\alpha.\sin\beta.\sin\left(60^0+\beta\right)$$

Lí luận tương tự : $m=CX=4d\sin\alpha.\sin\beta.\sin\left(60^0+\alpha\right)$

Trong tam giác XYZ, áp dụng định lí hàm số cos, ta có :

$$XY^2=m^2+n^2-2mn\cos\gamma$$

$$=16d^2\sin^2\beta.\sin^2\alpha\left[\sin^2\left(60^0+\alpha\right)+\sin^2\left(60^0+\beta\right)-2\sin\left(60^0+\alpha\right)\sin\left(60^0+\beta\right)\cos\gamma\right](4)$$

Do $\left(60^0+\alpha\right)+\left(60^0+\beta\right)+\gamma=180^0$, *nên xét tam giác EFG với* $\widehat{E}=60^0+\alpha, \widehat{F}=60^0+\beta, \widehat{G}=\gamma$. *Gọi* d_1 *là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác này. Theo định lí hàm số sin trong tam giác này, ta có :*

$$FG=e=d_1\sin\left(60^0+\alpha\right)=>\sin\left(60^0+\alpha\right)=\frac{e}{d_1}$$

$$EG=f=d_1\sin\left(60^0+\beta\right)=>\sin\left(60^0+\beta\right)=\frac{f}{d_1}$$

$$EF=g=d_1\sin\gamma=>\sin\gamma=\frac{g}{d_1}$$

Vậy thay vào (4), ta có :

$$XY^2=16d^2\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\frac{e^2+f^2-2ef\cos\gamma}{d_1^2}$$

$$=16d^2\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\frac{g^2}{d_1^2}=16d^2\sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma$$

$$=>XY=4d\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$$

Do vai trò như nhau, ta cũng có :

$$YZ=ZX=4d\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$$

$$=>YZ=ZX=XY$$

Vậy XYZ là tam giác đều.(đpcm)

<u> Chú ý :</u>*

1. Frank Morley *(1860-1937) sinh tại Anh, nhưng hầu như suốt đời sống ở Mĩ. Trong vài chục năm ông là giáo sư toán học ở trường Đại học tổng hợp thuộc bang Baltimore.*

Năm cuối cùng của thế kỉ XIX-1899,- Morley phát hiện ra rằng khi chia ba góc của một tam giác bất kì thì 3 giao điểm của những đường chia ấy là những đỉnh của một tam giác đều. Định lí về đường chia ba góc được phổ biến rộng rãi. Các nhà toán học nhiều nước nhận nó như một "bông hoa rừng" của hình học.

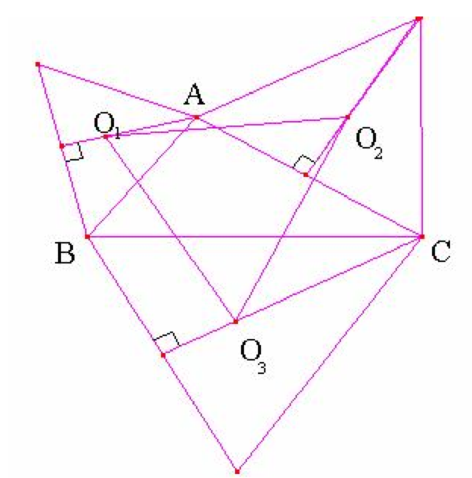
Nhưng Morley chỉ phát hiện mà không chứng minh. Một thời gian dài, những người yêu toán đi tìm "bông hoa rừng" ấy, và - cuối cùng - sau 10 năm, họ khám phá ra rằng nó thật sự tồn tại.
Cách chứng minh trên là một trong hai cách chứng minh bằng toán sơ cấp đầu tiên do nhà toán học Ấn Độ Naranergar tìm ra vào năm 1909. Cũng trong năm đó, một nhà toán học Ấn Độ khác là M.Sachyanarayan đưa ra một cách giải "phi lượng giác" (Chỉ dùng đến kiến thức hình học lớp 9).
Năm 1914, Morley công bố cách chứng minh định lí của mình bằng toán cao cấp. năm 1924, Morley lại trình bày tỉ mỉ cách chứng minh đã được cải tiến củ mình và mở rộng định lí trong trường hợp chia ba cả góc trong lẫn góc ngoài, đã chứng minh được sự tồn tại của 27 tam giác đều mà một trong số đó là tam giác Morley ban đầu. Cách chứng minh của Morley rất đẹp, song phải sử dụng tính chất của đường hình tim (cardioid) trong toán cao cấp.

"Bông hoa rừng" tiếp tục quyến rũ nhiều nhà toán học khác trên khắp thế giới, trong đó có nhà toán học nổi tiếng người Pháp, H.Lebesgue (1875-1942). Năm 1939 - tức là tròn 40 năm sau - Lebesgue đưa ra cách chứng minh định lí Morley mở rộng - với 27 tam giác đều - bằng toán sơ cấp - điều mà Morley chỉ là được với đường Cardioid, với cả trái tim của mình !

<u>Bài 10:</u> (Bài toán Napoléon)

Cho tam giác ABC. Về phía ngoài trên ba cạnh tam giác dựng ba tam giác đều. Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm của ba tam giác đều ấy. Chứng minh $O_1O_2O_3$ cũng là tam giác đều.

<u>Giải :</u>



Theo định lí hàm số cos, ta có :

$$O_2O_3^2 = CO_2^2 + CO_3^2 - 2CO_2.CO_3.\cos O_2CO_3$$

$$\Rightarrow O_2O_3^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2.\frac{ab}{3}.\cos\left(60^0 + C\right)$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)$$

Hay

$$O_2O_3^2 = \frac{a^2+b^2}{3} - \frac{1}{6}\left(a^2+b^2-c^2\right) + \frac{ab\sqrt{3}}{3}.\frac{2S}{ab}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S\sqrt{3}}{3}(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$O_1O_3^2 = O_1O_2^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S\sqrt{3}}{3}$$

$$=> O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3$$

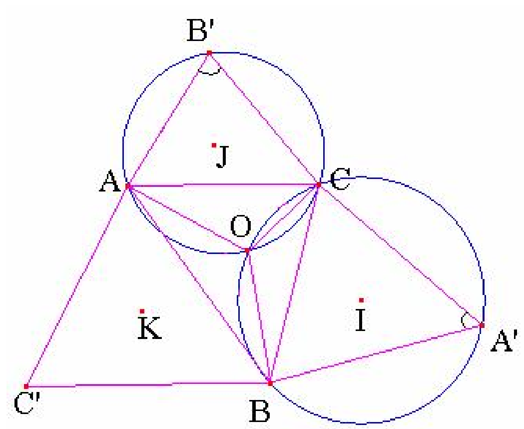
Nên $O_1O_2O_3$ là tam giác đều. (đpcm)

** Chú ý:*

***1. Napoléon Bonaparte** (1769-1821), hoàng đế nổi tiếng của nước Pháp, là một người ham thích toán, ngay cả lúc cầm quân ở trận mạc, ông vẫn dành những phút giải trí qua việc giải các bài toán. Napoléon đã nêu ra một số bài toán, trong đó có bài toán nói trên.*

***2.** Sau đây xin giới thiệu cách giải "phi lượng giác" của bài toán trên (chính là cách giải của hoàng đế Napoléon)*

Dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ACB', BCA' dựng trên 2 cạnh AC và BC. Hai đường tròn này cắt nhau tại C và O. Hai tứ giác nội tiếp AB'CO và BA'CO có $\widehat{B'} = \widehat{A'} = 60^0$, do đó $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^0$, suy ra $\widehat{AOB} = 120^0$ và đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ABC' cũng qua O



Như vậy, ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ABC', BCA', CAB' cắt nhau tại O. Ta có $IJ \perp OC$

(Vì IJ là đường nối tâm của 2 đương tròn có dây chung OC)

Tương tự $JK \perp OA => \widehat{KJI} = 60^0$ (do $\widehat{AOC} = 120^0$).

Tương tự ta có $JKI = JIK = 60^0$

Nên IJK là tam giác đều (đpcm)

CHƯƠNG III:

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Do số lượng của các bài toán phương trình, bất phương trình là vô cùng nhiều nên ở phần này chúng tôi chỉ trình bày một số bài đã chọn lọc,có cách giải hay, độ khó tương đối và chắc chắn sẽ thú vị hơn rất nhiều so với những bài toán thông thường khác.

Bài 1: *Tìm a để hai phương trình sau tương đương:*

$\sin 3x = 5\sin x\ (1)$

$cos^2x + asinx = 1 + sinx(2)$

Giải:

Ta có (2) $\leftrightarrow -sin^2x + asinx = sinx$

$\leftrightarrow (\sin x = 0)$ *hoặc* $(\sin x = a - 1)$

$\leftrightarrow sinx(4sin^2x + 2) = 0 \leftrightarrow sinx = 0$

Vậy(1) tương đương với (2) khi và chỉ khi:

a= 1 *hoặc a* > 2 *hoặc* $a < 0$

Bài 2: *Tìm a,b,c để phương trình sau đây nghiệm đúng:*

$\forall x \in R: a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0(2)$

Giải:

Điều kiện cần.Giả sử (1) đúng $\forall x$*, nói riêng:*

Khi $x = \frac{\pi}{2}, ta\ có\ -b = 0 \rightarrow b = 0$

Khi $x = \frac{\pi}{6}, ta\ có\ a\cos\frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow a = 0$

Khi x= $0, ta\ có\ c = 0$

Vậy điều kiện cần là a=b=c=0

Điều kiện đủ: nếu a=b=c=0 thì rõ ràng (1) đúng ($\forall m$*).Tóm lại a=b=c=0 là điều kiện cần và đủ để (1) đúng* $\forall x$

Bài 3: *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = \sin x - \sin y\ (1) \\ \tan x + \tan y = 2 \\ 0 < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Giải:

(1) $\leftrightarrow \tan y - \sin y = tanx - \sin x$

Xét hàm số f (t) $= tant - sint$

$$\rightarrow f'(t) = \frac{1}{cos^2t} - t > 0\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy f (t) là hàm đồng biến trên (0, $\frac{\pi}{2}$*),*

Ta thấy: (1) $\leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\leftrightarrow x = y$

Vậy (1),(2),(3) $\leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ tanx = 1 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}$

Như thế hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Bài 4: *Giải phương trình:*

$$tan^4x + tan^4 2x + cot^4 3x = \frac{1}{3}$$

Giải:

Điều kiện để phương trình có nghĩa là :

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq k\pi \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

Ta có:

$$\cot 3x = \frac{1 - \tan x \tan 2x}{\tan x + \tan 2x}$$

$$\rightarrow \tan x \cot 3x + \tan 2x \cot 3x + \tan x \tan 2x = 1(4)$$

Từ (4) suy ra:

$$3(tan^4x + tan^4 2x + cot^4 3x) - (\tan x \cot 3x + \tan 2x \cot 3x + \tan x \tan 2x)^2 = 0(5)$$

$$\leftrightarrow (tan^2x - tan^2 2x)^2 + (tan^2x - cot^2 3x)^2 + (tan^2 2x - cot^2 3x)^2 + (tan^2x - \tan 2x \cot 3x)^2 + (tan^2 2x - \tan x \cot 3x)^2 + (cotan^2 3x - \tan x \tan 2x)^2 = 0$$

$$\leftrightarrow tan^2x = tan^2 2x = cot^2 3x = \tan 2x \cot 3x = \tan x \cot 3x = \tan x \tan 2x$$

$$\leftrightarrow tanx = tan2x = cot3x$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} tanx = tan2x(6) \\ tanx = cot3x(7) \\ tan^4x = \frac{1}{9}(8) \end{cases}$$

Từ (6) suy ra $2x = x + k\pi$

$\leftrightarrow \ x = \ k\pi(9)$

Do (9) không thõa mãn (3) nên riêng (6) đã vô nghiệm

Vậy hệ (6),(7),(8) dĩ nhiên vô nghiệm, tức là phương trình đã cho vô nghiệm>

*<u>*Chú ý:</u> Bằng lập luận tương tự như trên, ta có thể giải phương trình*

$$tan^2x + tan^2y + cot^2(x + y) = 1$$

Cụ thể đưa phương trình ấy về hệ sau:

$$tan^2x = tan^2y = cot^2(x+y) = \frac{1}{3}$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình ấy là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, y = \frac{\pi}{6} + m\pi \text{ với } m, k \in \mathbb{Z}$$

<u>Bài 5</u>: *Giải phương trình:*

$$4^{\sin x} - 2^{1+\sin x}\cos(xy) + 2^{|y|} = 0$$

Giải:

$$4^{\sin x} - 2^{1+\sin x}\cos(xy) + 2^{|y|} = 0$$

$$\leftrightarrow [2^{\sin x} - \cos(xy)]^2 + 2^{|y|} - cos^2(xy) = 0(1)$$

Do $\begin{cases} 2^{|y|} \geq 1 \ \forall y \\ cos^2(xy) \leq 1 \ \forall x, \forall y \end{cases}$

Vậy (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 2^{\sin x} = \cos(xy) \\ 2^{|y|} = 1 \\ cos^2(xy) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2^{\sin x} = 1 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ sinx = 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi \end{cases} \ k \in \mathbb{Z}$$

<u>Bài 6</u>: *Giải phương trình*

$$\sqrt[4]{4sin^2x - 4sinx + 2} + \sqrt{8sin^2x - 8sinx + 11} = 1 - 12sin^2x + 12sinx$$

<u>Giải:</u>

Dễ thấy nó có thể viết dưới dạng tương đương sau:

$$\sqrt[4]{(2sinx - 1)^2 + 1} + \sqrt{2(2sinx - 1)^2 + 9} = -12\left(sinx - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(5)$$

Từ đó có VT(5)≥ 4

VP(5)≤ 4

Vậy (5)$\leftrightarrow sinx = \frac{1}{2}$

$$\leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

CHƯƠNG IV:

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1: *Giải bất phương trình :* $7\sqrt{\tan x}\left(\sin^2 x+3\cos^2 x\right)\le 6\sqrt[4]{3}\left(\sin^2 x+4\cos^2 x\right)$

Giải :

ĐK : $\cos x\ne 0$. *Chia hai vế cho* $\cos^2 x$ *ta được:*

$7\sqrt{\tan x}\left(\tan^2 x+3\right)\le 6\sqrt[4]{3}\left(\tan^2 x+4\right)$

Đặt tanx = t, ĐK : $t\ge 0$, *bpt trở thành :*

$7\sqrt{t}\,\dfrac{t^2+4}{t^2+3}=6\sqrt[4]{3}$

Đặt VT = $f\left(x\right)$, *với* $t\ge 0$, *ta có:*

$$\begin{cases}\text{Hàm }\left(\sqrt{t}\right)\text{ đồng biến trên }\left[0,+\infty\right)\\ \text{Hàm }\dfrac{t^2+3}{t^2+4}\text{ đồng biến trên }\left[0,+\infty\right)\end{cases}$$

=> $f\left(t\right)$ *là hàm đồng biến trên* $\left[0,+\infty\right)$ *và đo được* $t=\sqrt{3}$ *thì* $f\left(t\right)=6\sqrt[4]{3}$

t	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f(t)	$\nearrow$	$6\sqrt[4]{3}$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(t\right)\le 6\sqrt[4]{3} <=> t\le\sqrt{3}$

Từ đó suy ra $0\le\tan x\le\sqrt{3} <=> k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{3}+k\pi (k\in Z)$

Bài 2: *Giải bất phương trình :* $\cos\left[\pi\left(x^2-10x\right)\right]-\sqrt{3}\sin\left[\pi\left(x^2-10x\right)\right]>1$

Giải:

Đặt $y=\pi\left(x^2-10x\right)$. *Bpt trở thành :*

$\cos y-\sqrt{3}\sin y>1$

$<=> \cos y-\tan\dfrac{\pi}{3}\sin y>1$

$<=> \cos y\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin y\sin\dfrac{\pi}{3}>\cos\dfrac{\pi}{3}$

$<=> \cos\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)>\cos\dfrac{\pi}{3}$

$<=> -\frac{\pi}{3}+k2\pi < y+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}+k2\pi, k \in Z$

$<=> -\frac{2\pi}{3}+k2\pi < y < k2\pi$

$<=> -\frac{2\pi}{3}+k2\pi < \pi\left(x^2-10x\right) < k2\pi$

$<=> -\frac{2}{3}+2k < x^2-10x < 2k\left(*\right)$

1.Giải bpt $x^2-10x < 2k, k \in Z$

$<=> x^2-10x-2k < 0\left(1\right)$

(1) có nghiệm nếu:

$\Delta' = 25+2k \geq 0 <=> k \geq -12$

$5-\sqrt{25+2k} < x < 5+\sqrt{25+2k}$

2. Giải bpt $-\frac{2}{3}+2k < x^2-10x$

$<=> x^2-10x-2k+\frac{2}{3} \geq 0\left(2\right)$

$\Delta' = 25+2k-\frac{2}{3} \geq 0 <=> k \geq -12$

(2) có nghiệm khi $k \geq -12$

$x < 5-\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} \quad v \quad x > 5+\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}}$

Với mọi $k \geq -12$*, ta có:*

$0 < 25+2k-\frac{2}{3} < 25+2k$

$=> \sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} < \sqrt{25+2k}$

$$=> \begin{cases} 5-\sqrt{25+2k} < 5-\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} \\ 5+\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} < 5+\sqrt{25+2k} \end{cases}$$

Do đó nghiệm của (*) là

$$\left[\begin{array}{l} 5-\sqrt{25+2k} < x < 5-\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} \\ 5+\sqrt{25+2k-\frac{2}{3}} < x < 5+\sqrt{25+2k}, k \in Z, k \geq -12 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bpt đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} 5-\sqrt{25+2k} < x < 5-\sqrt{25+2k-\dfrac{2}{3}} \\ 5+\sqrt{25+2k-\dfrac{2}{3}} < x < 5+\sqrt{25+2k} \end{array}\right.$$

Với $k \in Z, k \geq -12$

<u>Bài 3:</u> *Giải bpt:* $5+2\cos 2x \leq 2|2\sin x-1|(1)$

<u>Giải:</u>

$(1) <=> 5+2\left(1-2\sin^2 x\right) \leq 3|2\sin x-1|$

$<=> 7-4\sin^2 \leq 3|2\sin x-1|$

Đặt $y=\sin x$ *với* $-1 \leq y \leq 1$*, ta có:*

$7-4y^2 \leq 3|2y-1|(2)$

a. Xét trường hợp : $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$*. Ta có :*

$(2) => 7-4y^2 \leq 3(2y-1)$

$<=> 4y^2+6y-10 \geq 0$

$<=> 2y^2+3y-5 \geq 0$

$=> y \leq -\frac{5}{2}, y \geq 1$

Kết hợp với điều kiện a. ta có y = 1 => sinx = 1 $<=> x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in Z$

b. Xét trường hợp : $-1 \leq y \leq \frac{1}{2}$*. Ta có:*

$(2) => 7-4y^2 \leq 3(-2y+1)$

$<=> 4y^2-6y-4 \geq 0 <=> 2y^2-3y-2 \geq 0$

$=> y \leq -\frac{1}{2}, y \leq 2$

Kết hợp với điều kiện b. ta có $-1 \leq y \leq -\frac{1}{2}$

$=> -1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2} <=> -\frac{5\pi}{6}+l2\pi \leq -\frac{\pi}{6}+l2\pi, l \in Z$

Vậy nghiệm bpt đã cho là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ -\dfrac{5\pi}{6}+l2\pi \leq -\dfrac{\pi}{6}+l2\pi \end{array}\right.$ *với* $k, l \in Z$

<u>Bài 4:</u> *Giải bất phương trình :* $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x} \leq 30(1)$ *với* $x \in (0, 2\pi)$

<u>Giải:</u>

Đặt $y=81^{\sin^2 x}$ *với* $1 \leq y \leq 81(*)$

Ta có : $81^{\cos^2 x} = 81^{1-\sin^2 x} = \frac{81}{y}$

=> $y + \frac{81}{y} - 30 \le 0$

=> $y^2 - 30y + 81 \le 0$

<=> $3 \le y \le 27$ *thoả (*)*

Do đó :

$3 \le 81^{\sin^2 x} \le 27$

<=> $3^1 \le 3^{4\sin^2 x} \le 3^3$

<=> $1 \le 4\sin^2 x \le 3$

<=> $\frac{1}{4} \le \sin^2 x \le \frac{3}{4}$

<=> $\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a), -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin x \le -\frac{1}{2}(b)$

Giải (a) <=> $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{6}$

Giải (b) <=> $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \le x \le \frac{11\pi}{6}$

Đó là 4 tập nghiệm của bất phương trình trên.

Bài 5: *Giải bất phương trình:*

$$2^{\frac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} - \sqrt{3}} \ge 1 \quad (*)$$

Giải:

Ta có

$$\frac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x}$$

$$= \frac{\sin 2x + \sin 4x - \sin 3x}{\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x}$$

$$= \frac{2\sin 3x \cos x - \sin 3x}{2\cos 3x \cos x - \cos 3x}$$

$$= \frac{\sin 3x(2\cos x - 1)}{\cos 3x(2\cos x - 1)} = \tan 3x$$

Với điều kiện $2\cos x \ne 1$

Ta có :

$(*) <=> 2^{\tan 3x-\sqrt{3}} \geq 1$

$<=> \tan 3x-\sqrt{3} \geq 0$

$<=> \tan 3x \geq \sqrt{3}$

$<=> \frac{\pi}{3}+k\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$

$<=> \frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$

Vậy nghiệm của (*) là $\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}, k \in Z$

Bài 6: Giải bất phương trình : $\sqrt{\sin x+2\cot x} \leq -1$

Giải :

Trong điều kiện có nghĩa của nó thì $\sqrt{\sin x+2\cot x} \geq 0$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7: Giải bất phương trình : $4\left(x^3-2x+1\right)\left(\sin x+2\cos x\right) \geq 9|x^3-2x+1|(1)$

Giải:

Xét các khả năng sau:

a. Nếu $x^3-2x+1>0$

$(1) <=> \sin x+2\cos x \geq \frac{9}{4}$ *vô lí vì* $-\sqrt{5} \leq (\sin x+2\cos x) \leq \sqrt{5}$

b. Nếu $x^3-2x+1<0$

$(1) <=> \sin x+2\cos x \leq -\frac{9}{4}$. *Vô lí*

Do đó (1) chỉ có thể có nghiệm khi $x^3-2x+1=0(2)$

Phương trình (2) có nghiệm là $x_1=1, x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Đó cũng là nghiệm của bất phương trình trên.

<u>CHƯƠNG V:</u>

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

<u>Bài 1:</u> *Chứng minh rằng tỷ số khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh với khoảng cách bé nhất giữa 2 đỉnh của 1 tứ giác lồi bất kì không bé hơn* $\sqrt{2}$.

<u>Giải:</u>

Giả sử M, m tương ứng là khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh và khoảng cách bé nhất giữa 2 đỉnh của một tứ giác lồi. Vì ít nhất một trong các góc của tứ giác không phải là góc nhọn. Thí dụ $\widehat{ABC}$. *Khi đó :*

$M^2 \geq AC^2 = AB^2+BC^2-2AB.BC\cos ABC$

$\Rightarrow M^2 \geq AB^2+BC^2 \geq m^2+m^2=2m^2$

$\Rightarrow \dfrac{M}{m} \geq \sqrt{2}$. *Đó là điều phải chứng minh.*

Bài 2: *Cho tứ giác lồi ABCD . Chứng minh rằng :*

$$\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{D}{4} + \frac{16}{4 + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{D}{2}} < 4$$

Giải:

Với x, y, z, t > 0 thì: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{16}{x+y+z+t}$

Mà ABCD lồi nên:

$$0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{D}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}, \tan\frac{D}{2} > 0$$

Ta có:

$$\frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+\tan\frac{C}{2}} + \frac{1}{1+\tan\frac{D}{2}} \geq \frac{16}{4 + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{D}{2}}$$

Do đó , để có điều phải chứng minh , chỉ cần chứng minh :

$$\left(\tan\frac{A}{4} + \frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}}\right) + \left(\tan\frac{B}{4} + \frac{1}{1+\tan\frac{B}{2}}\right) + \left(\tan\frac{C}{4} + \frac{1}{1+\tan\frac{C}{2}}\right) + \left(\tan\frac{D}{4} + \frac{1}{1+\tan\frac{D}{2}}\right) < 2$$

Đặt $x = \tan\dfrac{A}{4}$ *thì* $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{2x}{1-x^2}$. *thế thì:*

$$\tan\frac{A}{4} + \frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}} = \frac{1+x+x^2-x^3}{1+2x-x^2} < \frac{2x^2-x-x^3}{1+2x-x^2} + 1 < 1$$

Vì $1+x \geq 2x \Rightarrow x + x^3 \geq 2x^2$. *Điều phải chứng minh.*

Bài 3: *Cho 4 số thay đổi a,b,x,y thoả mãn* $a^2+b^2=4$ *và* $x^2+y^2=3$

Chứng minh rằng: $-2\sqrt{3} \leq ax + by \leq 2\sqrt{3}$

Giải:

$$a^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in R : \begin{cases} \dfrac{a}{2} = \cos\alpha \\ \dfrac{b}{2} = \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\cos\alpha \\ b = 2\sin\alpha \end{cases}$$

Tương tự : $x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow \exists \beta \in R : \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \cos\beta \\ \dfrac{y}{\sqrt{3}} = \sin\beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos\beta \\ \sqrt{3}\sin\beta \end{cases}$$

Vậy $M = ax+by$

$= 2\cos\alpha . \sqrt{3}\cos\beta + 2\sin\alpha.\sqrt{3}\sin\beta$

$= 2\sqrt{3}(\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta)$

$= 2\sqrt{3}.\cos(\alpha - \beta)$

Vì $\cos(\alpha - \beta) \le 1$ *nên* $|M| \le 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3} \le ax + by \le 2\sqrt{3}$

Kết luận: $\min(ax + by) = -2\sqrt{3}$

$\max(ax + by) = 2\sqrt{3}$.

** Chú ý : Với cách giải hoàn toàn tương tự ta cũng có thể giải được các bài toán sau:*

1. *Cho x và y là 2 số thay đổi và nghiệm đúng phương trình $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x-y+1$*
2. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $y-2x+5$ biết x và y là ha số thay đổi thoả mãn $36x^2+16y^2=9$*

Bài 4:*Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:*

1. $a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b) \le p^2R^2$
2. $p^2 \ge ab.\sin^2 A+bc.\sin^2 B+ac.\sin^2 C$

Giải:

1. *Đưa bất đẳng thức về dạng tương đương sau:*

$$(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c}\right) \le (p-a+p-b+p-c)^2 R^2 \quad (1)$$

Đặt $p - a = x, p - b = y, p - c = z$. *Khi đó* $x, y, z > 0$

Với kí hiệu ấy thì

(1) $\Leftrightarrow a^2yz + b^2xz + c^2xy \le (x+y+z)^2 R^2$

Theo định lí hàm số cosin suy ra:

$$zy4\sin^2 A + xz4\sin^2 B + xy4\sin^2 C \le (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow zy4\sin^2 A + xz4\sin^2 B + xy4\sin^2 C \le x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\left(y - 2y.\sin^2 C + z - 2z.\sin^2 B\right) + 2yz - yz4\sin^2 A + y^2 + z^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\left(y\cos 2C + z\cos 2B\right) + 2yz\cos 2A + y^2 + z^2 \ge 0 \qquad (2)$$

Quan niệm vế trái của (2) là tam thức bậc 2 của x có hệ số của x^2 là 1>0. còn:

$\Delta' = (y\cos 2C + z\cos 2B)^2 - 2yz\cos 2A - y^2 - z^2$
$= (y^2\cos^2 2C - 1) + (z^2\cos^2 2B - 1) + 2yz(\cos 2B\cos 2C - \cos 2A)$
$= -y^2\sin^2 2C - z^2\sin^2 2B + 2yz[\cos 2B\cos 2C - \cos(2B + 2C)]$
$= -y^2\sin^2 2C - z^2\sin^2 2B + 2yz\sin 2B\sin 2C$
$= -(y\sin 2C - z\sin 2B)^2 \le 0$

Theo định lí về dấu tam thức bậc hai suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

2. *Bất đẳng thức cho tương đương với bất đẳng thức sau:*

$$\frac{(a+b+c)^2}{4} \ge ab\sin^2 A + ac\sin^2 C + bc\sin^2 B$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2a \ge 2ba(1 - \cos 2A) + 2ca(1 - \cos 2C) + 2cb(1 - \cos 2B)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos 2A + 2bc\cos 2B + 2ac\cos 2C \ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 2a(b\cos 2A + c\cos 2C) + b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B \ge 0 \quad (3)$$

Quan niệm vế trái là tam thứ bậc hai của a. Do hệ số của a^2 là 1>0 và:

$\Delta' = (b\cos 2A + c\cos 2C)^2 - 2bc\cos 2B - c^2 - b^2$
$= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc(\cos 2A\cos 2C - \cos 2B)$
$= -b^2\sin^2 2A - c^2\sin^2 2C + 2bc\sin 2A\sin 2C$
$= -(b\sin 2A - c\sin 2C)^2 \le 0$

Vậy (3) đúng và đó là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 5: *Cho tứ diện OABC vuông tại O . Gọi α, β, δ lần lượt là góc giữa đương cao OH với các cạnh OA,OB,OC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$T = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\delta} + \frac{\cos\beta + \cos\delta}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\alpha + \cos\delta}{\cos^2\beta}$$

Giải:

Đặt $x = \cos\alpha, y = \cos\beta, z = \cos\delta$

Vì : $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\Rightarrow 0 < x, y, z < 1$*, do đó* α, β, δ *đều nhọn. Ta có:*

$$T = \frac{x+y}{z^2} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}$$

Xét $(x+y+z)T = (x+y+z)\left(\frac{x+y}{z^2} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\right)$

$$= \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z+x}{y}\right)^2$$

$$\ge \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}\right)^2$$

$\ge 2 + 2 + 2 + \frac{1}{3}.6^2 = 18$ *(1) .(Bất đẳng thức Côsi và Bunhiacôpxki)*

Ngoài ra : $0 < x + y + z \le \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3}$ *(2).*

Từ (1) và (2) suy ra $T \ge \frac{18}{\sqrt{3}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow OA = OB = OC$.

Vậy T đạt GTNN bằng $\frac{18}{\sqrt{3}}$ *khi tứ diện OABC vuông cân tại O.*

Bài 6: *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$S = (1+b+c-bc)\cos A + (1+a+c-ac)\cos B + (1+b+a-ab)\cos C \le 3$$

Giải:

Ta có thể thấy :

$$S = \cos A + \cos B + \cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C - (ab\cos C + bc\cos A + ac\cos B)$$

Đặt $P = \cos A + \cos B + \cos C$

$Q = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

$R = ab.\cos C + bc.\cos A + ac.\cos B$

Dễ thấy : $P = \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ *(1)*

(Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ *là tam giác đều)*

Theo định lí hàm số sin ta có:

$$b\cos C + c\cos B = 2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B) = 2R\sin(B+C) = 2R\sin A = a$$

Tương tự ta có:

$$a\cos C + c\cos B = b, a\cos B + b\cos A = c$$

$\Rightarrow Q = a+b+c$. *Còn theo định lí hàm số cosin , thì:*

$$R = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

2 (2)

Để ý rằng:

$$\frac{3}{2} + (a+b+c) - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$= 3 - \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2}{2} \le 3 \quad (3)$$

Dấu "=" trong (3) xảy ra khi a=b=c=1

Từ (2) và (3) suy ra $S \le 3$. *Đó là điều phải chứng minh.*

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *đồng thời có dấu "=" trong (1) và (3)* $\Leftrightarrow \Delta ABC$ *là tam giác đều có cạnh bằng 1.*

Lời kết :

Chúng ta đã cùng nhau đi một vòng quanh vương quốc của những bài toán lượng giác, đã cùng nhau chiêm nghiệm sự rộng lớn của đại dương kiến thức bao la. Nhưng toán học mãi là một câu chuyện không có hồi kết, chúng tôi - vẫn còn thiếu kinh nghiệm và chưa chuyên nghiệp, nên chỉ có thể giới thiệu một số bài toán hay và rất thú vị ẩn trong những công thức khô khan và quá ư trừu tượng. Bạn sẽ thấy một số bài toán mà có thể chẳng dùng để làm gì cả, nhưng hãy coi nó như một bông hồng, một bức hoạ đẹp hay một bản tình ca của thiên đường toán học…Vì một lẽ, nó được sinh ra trong một phút, một ngày, cả một đời người hay qua nhiều thế hệ chỉ để thoả mãn niềm đam mê của những ai phát hiện và chứng minh được vẻ đẹp tuyệt vời của nó!

Đề tài này, chúng em kính tặng người thầy giáo yêu mến, thầy Nguyễn Lái.

Mọi góp ý xin liên hệ : Tổ 4 – Toán 2 – Niên khoá : 2008 – 2011
Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh
Tp.Tuy Hoà, tỉnh Phú Yên.

Danh sách thành viên :

1. ***Trần Hoàng Nguyên***
2. ***Nguyễn Ngọc Viễn Đông***
3. ***Nguyễn Hữu Phát***
4. ***Nguyễn Phan Thảo Lan***
5. ***Nguyễn Vũ Bảo Di***
6. ***Nguyễn Trương Mĩ Hiền***
7. ***Đỗ Anh Minh***